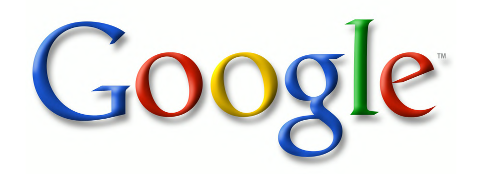
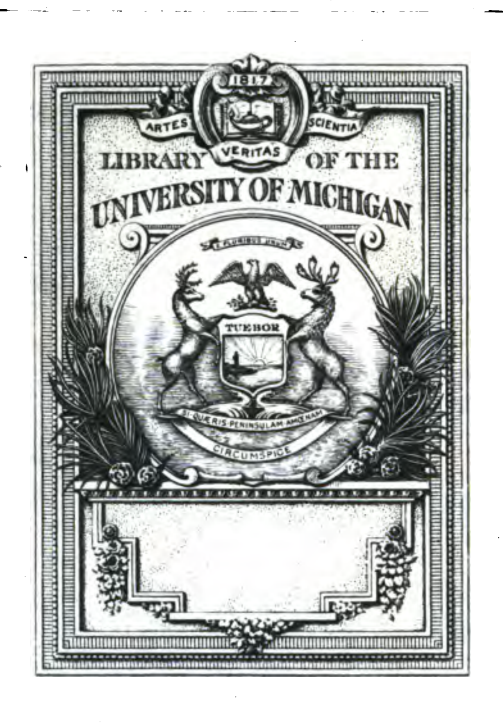
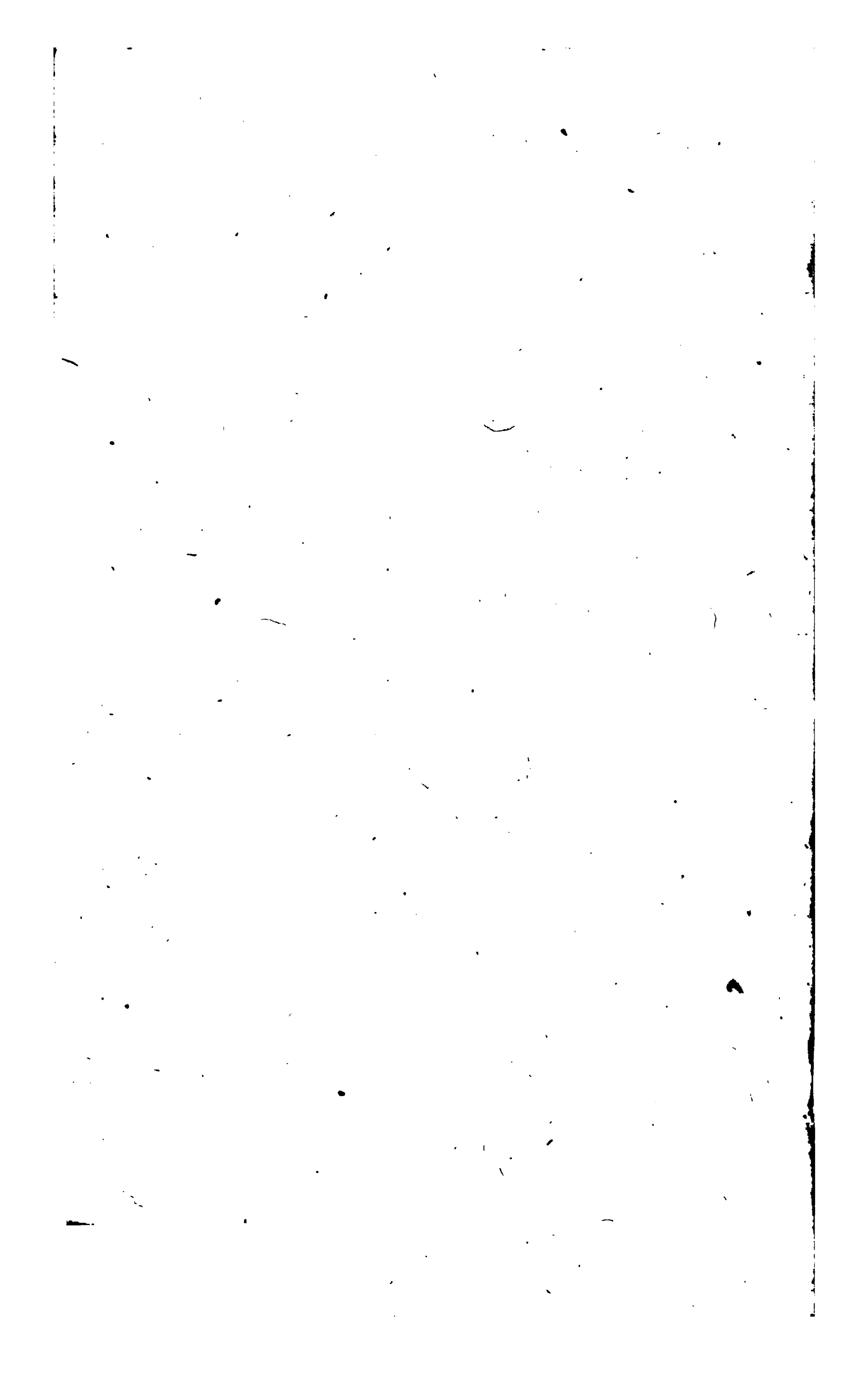



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



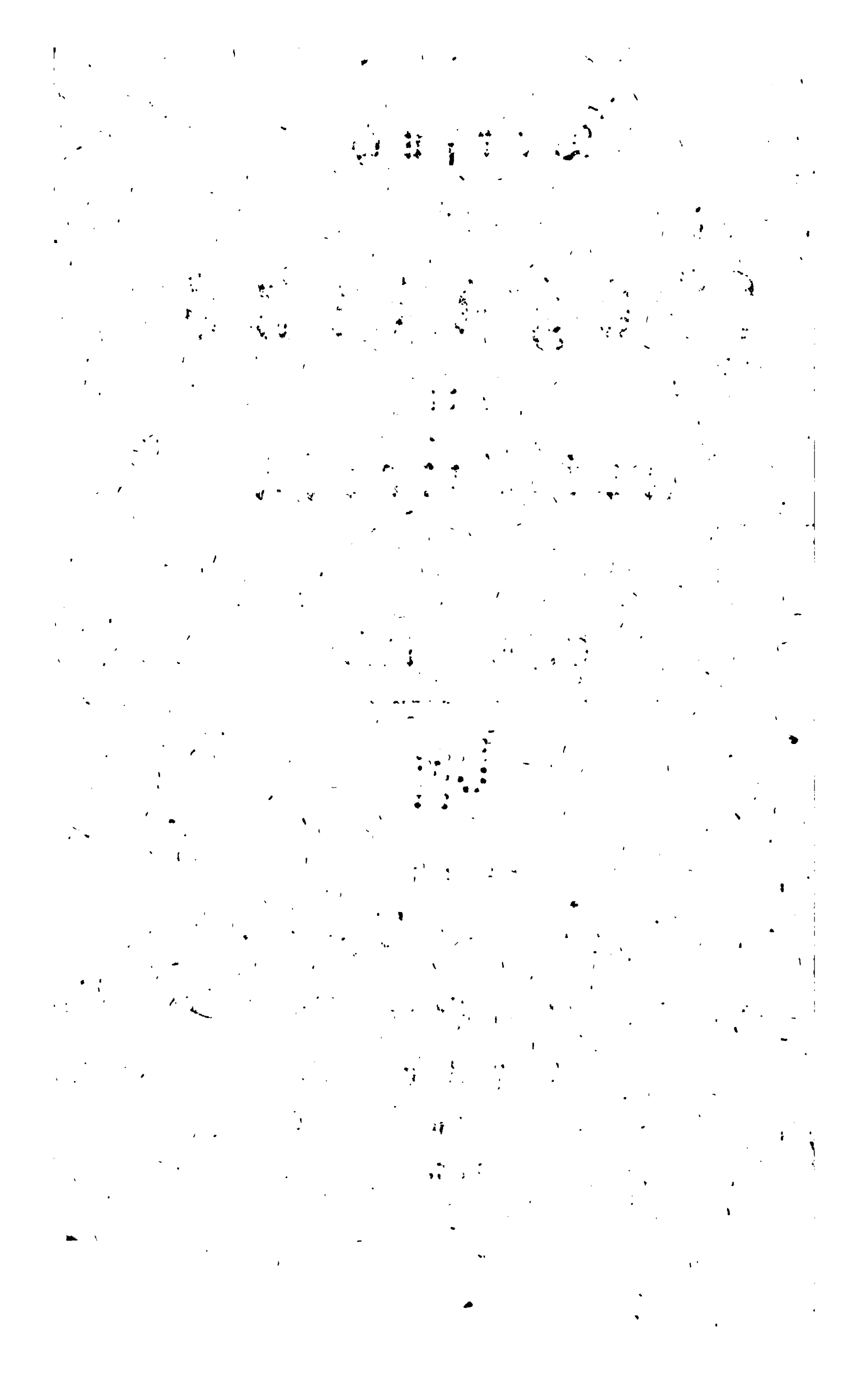
Versuch eines Magazins für die Arithmetik.

Erstes Stück.

von

Georg Friedrich Petersen.

Celle,
bey Ernst August Richter
1785.



Dem

Hochgebohrnen Freiherrn

Herrn

Ernst August Wilhelm von dem Bussche

Seiner Königlichen Majestät von Groß-
britannien und Churfürstlichen Durchlaucht
von Braunschweig und Lüneburg würklichen
Geheimen-Rathe, Staats-Minister
und Großvoigte,

in Unterthänigkeit zugeeignet.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Hochgebohrner Freiherr,

Gnädigster Herr!

Wenn Beispiel von Herzensgüte und Tugendliebe bei den ersten des Staats, alle übrige Klassen von Unterthanen zur Veredlung ihres Herzens und zur Tugend antreibt; wenn erhabener Verstand, Verehrung der Wissenschaften und Fürsorge für die

Er-

Erhaltung derselben, den äußern Glanz der Großen verherlichende Eigenschaften sind, die dem Mann und dem Jüngling seine Seelenkräfte nach Vermögen auszubilden anfeuern, sich dem Staate nützlich zu machen, aufmuntern: — so kann das Beispiel Ihro Excellenz dieses im vorzüglichsten Maaße. Hannovers gute Unterthanen — und unter diese schmeichle ich mich auch zu gehören — preisen sich glücklich, Sie, gnädigster Herr, als Einen aus der Reihe der verehrungswürdigsten Männer zu verehren,

ehren, die der für unser Wohl zärt-
lichgesinnte König zu Vätern des
Landes bestimmet hat. — Die erhabe-
nen Eigenschaften, die sich alle in der
großen Seele Ihro Excellenz verei-
nigen — zum Wohl aller meiner Mit-
unterthanen vereinigen, sind über alle
Schilderung einer schwachen Feder hin-
weg, und die ehrfurchtsvolle Liebe die
sie jedem guten Herzen einflößen, kann
diese Größe wohl empfinden aber nicht
laut genug sagen.

Verwegenheit würde es seyn, es
zu wagen, eine Schrift wie die gegen-

wär-

wärtige, Ihnen, Groser Minister unterthänigst zuzueignen, wenn mir nicht Ihro erhabene Gröse zugleich die tröstliche Hofnung gäbe, daß Ihro Excellenz diese Freiheit in Gnaden zu verzeihen geruhen werden. — Arithmetik ist das Vergnügen meiner Jünglingsjahre bisher gewesen, und nun in den reifern Jahren meines Lebens wage ich es, durch diese meine Lieblingswissenschaft öffentlich nützlich zu werden; und wenn das Publikum meine gewiß redliche Absicht erkennt, so hoffe ich diesen Nutzen zu erreichen. Demohn-

ge-

grachtet erkenne ich, wie wenig diese Erstlinge meiner arithmetischen Bemühungen würdig sind, den Namen Ihro Excellenz an ihrer Spitze zu tragen; aber Ihro Gnade läßt mich gnädige Aufnahme und Verzeihung hoffen, wenn ich hiedurch mich dieser Gnade empfehle.

Meine täglichen Wünsche für Sie, theurer Vater des Landes, und Ihre hohe Familie wird der Allwissende erhören, und Lebenslang wird es meine angenehmste Beschäfti-

gung

gung seyn. Ihro Excellenz von der mich ganz beseelenden Ehrfurcht zu versichern, mit welcher ich ersterbe

Hochgebohrner Freiherr,

Gnädigster Herr

Ihro Excellenz

unterthänigster Knecht

Georg Friedrich Petersen.



Vorrede.

Hier Leser, haben Sie das erste Stück meines Versuchs eines Magazins für die Arithmetik. Die erste Abhandlung wird Sie von dem Zwecke, Gegenstande und Plan desselben unterrichten. Sie werden es sehen, daß es eine Sammlung von Beiträgen zur Theorie und der Anwendungen der Arithmetik seyn soll; daß es das ergänzen soll, was man in den Lehrbüchern nicht findet, und zum Theil auch nicht finden kann. – Wenn Selbstzufriedenheit Glück ist, so werde ich glücklich seyn, wenn ich meinen Zweck nur einiger-

maaßen

meisten erreicht, den Beifall der Kenner nur einigermaaßen verdienet habe: denn der Beifall und der Tadel deßelben soll für die Fortsetzung entscheiden.

In dieser Vorrede will ich meinen Lesern in Hinsicht auf die Fortsetzung noch etwas sagen.

1) Ich habe in der Ankündigung dieses Magazins zwar gesagt, daß es eine Monatsschrift werden sollte; Umstände aber, die ich damals noch nicht kannte, gebieten es mir, dies Versprechen zu widerrufen. Ich liefere daher jedes Stück, wenn ich Materialien dazu habe, ohne mich dabei an eine gewisse Zeit zu binden. Und übrigens werden 3 Stücke, ohngefähr von der Stärke wie dies, einen Band ausmachen, worüber dann auch dem dritten Stücke ein alphabetisches Register angehängt werden soll.

2) Da die Arithmetik eine Wissenschaft ist, deren Grundfesten unwidersprech-

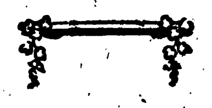
liche

liche Wahrheiten sind, so läßt sich alles auf diese zurückführen. — Satz und Gegensatz, Rede und Widerrede, wenn man bei beiden Wahrheit zum Augenmerke hat, kann in einer Schrift, wie diese ist, sehr gut beisammen stehen; denn erst durch die Gegenrede eines andern lernt man die Sachen mehr als einseitig betrachten, vermeidet Irrthümer, findet Wahrheit oder bestätiget sie. Das Magazin muß daher auch den Tadel über darin vorhandene Abhandlungen enthalten, aber, wie gesagt, dieser Tadel muß allezeit das Gepräge der Wahrheit, so wie der Aufrichtigkeit und Belehrung haben.

3) So viele periodische Schriften werden durch fremde Beiträge erhalten: darf ichs auch wol von Ihnen hoffen, Liebhaber der Arithmetik, mich mit Beiträgen aus unsern Fache zu beehren? Die Beiträge müßten sich freilich durch Wichtigkeit oder durch Nützlichkeit zur Aufnahme

empfeh-

empfehlen, denn schon in allen Rechenbüchern zu findende Sachen und unnütze Spekulationen würden wider dem Zweck der Schrift und ohne Nutzen seyn. Diejenigen, welche Beiträge aller Arten ins Magazin geben wollen, belieben sie nur unter der Addresse: **An Herrn Buchhändler Richter zu Celle,** und mit der innern Aufschrift: **Beiträge zum arithmetischen Magazin,** aber so viel wie möglich **postfrei** abzulassen.



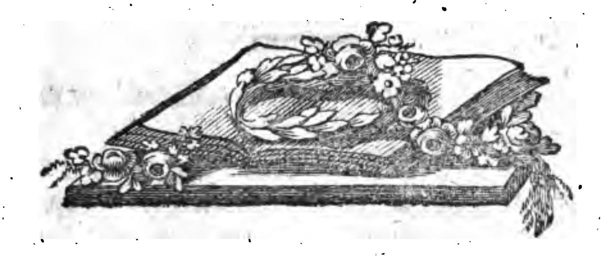
In-

Inhalt
des ersten Stücks des Magazins für die Arithmetik.

1)

Inhalt.

I. Vor-



I. Vorläufige Nachricht
über den Gegenstand, Endzweck und Plan dieses Magazins.

Der Begriff von Vielheit und Größe drängt sich unserer Seele bei dem Anblicke sichtbarer Gegenstände auf, und sie ist vermögend, sich diese Begriffe für blos abstrakte Dinge zu denken. Sie sondert Ein — dem Ganzen gleichartiges — Etwas ab, und mißt damit die Größe und zählt darnach die Vielheit des Ganzen. Die Verhältnisse der Theile der Dinge müssen in diesen Begriffen einen Unterschied machen: anders muß der Begriff in meiner Seele seyn, bei dem Anblicke oder dem Gedanken einer Menge Geldes; anders bei einem Stücke Acker; anders bei einer Anzahl Jahre; und der Grund dieser Verschiedenheit ist kein anderer, als die verschiedene Ueberein-

stimmung die die Theile der Dinge haben, oder wie sie betrachtet werden.

Alle Dinge in der Welt, und auch die, die sich unser Verstand nur denkt, sind entweder von der Art, daß alle ihre Theile würklich zugleich in ihr vorhanden sind, oder daß dies nicht ist, sondern dieselben in ihrer Würklichkeit nach und nach folgen. — Die von der ersten Art können seyn oder betrachtet werden: entweder, daß ihre Theile zusammenhängen und also eine Ausdehnung ausmachen, oder daß dies nicht ist, und sie nur eine Menge Theile eines gewissen Ganzen sind oder dafür betrachtet werden. Alle Dinge, deren Theile zusammenhängen, beschränken sich auf diejenigen, die ihren Raum einnehmen, und die Körper mit ihren Ausmessungen nach Länge, Breite und Dicke gehören in diese Art, und sind die Gegenstände der **Geometrie**. Alle übrigen, deren Theile zugleich würklich sind, gehören eigentlich in das Gebiet der **Arithmetik**. Gewiß schon ein großes Feld für die Arithmetik! — Aber man kann in Gedanken auch selbst die Theile der zusammenhängenden Größen von einander absondern, und ihre Verbindung, Ordnung und Lage nicht mit denken, und alsdann erweitert sich das Gebiet der Arithmetik um ein Großes; sie hilft die tiefen Lehren ihrer Schwester im Leben nutzbar machen. — In der Betrachtung der Größen deren Theile aufeinander folgen, wie Zeit und Bewegung, theilen sich Arithmetik und Geometrie, ohne einmal über den Werth ihrer

Ver-

Verdienste streitig zu werden. Bald betrachtet die Geometrie die nach und nach verfließende Zeit wie eine Linie, und bald die Arithmetik wie eine Zahl; und beides ist in der Betrachtnng der Größen gegründet.

Die Grenzen der Geometrie und Arithmetik sind also groß, sehr groß. Auf beiden ruhet das ausgebreitete Gebäude der Mathematik, das keine andere Grenzen hat, als die Welt, und welches durch jede Betrachtung eines Gegenstandes, wobei sich Größen durch Schlüsse bestimmen lassen, einen neuen Anbau erhält.

Zu meinem Gegenstande gehöret jetzt die Arithmetik allein; und ich schickte nur dieses voran, um desto besser meinen Faden verfolgen zu können. — **Arithmetik, Rechenkunst** ist der Name einer Wissenschaft, über deren Kapitel man noch nicht einig ist. Gemeiniglich verstehet man die Rechnung mit Zahlen darunter, und betrachtet eine andere Wissenschaft welche das A B C zu gewissen Absichten, auf gewisse Art, zusammensetzen lehrt, unter den Namen der Algebra: ein Name, der manchen (ich möchte sagen, den mehrsten) so fürchterlich klingt, daß sie sich davor, wie vor einem bösen Geiste kreuzen, da doch die Gegenstände beider Wissenschaften schwesterlich verwandt sind.

Erst durch Vergleichung mehrerer Größen, lassen sich neue finden, und soll unsere Seele diese Vergleichung anstellen können, so müssen Zeichen vorhanden seyn, die verschiedenen Größen unterscheidend der Seele darzustellen. Die Wahl dieser Zeichen ist willkürlich:

genug wenn die Absicht erreicht wird. Die Art und Weise, wie mit diesen Zeichen, die zu suchende Größen gefunden werden, ist die Wissenschaft der Arithmetik. Die Art der Größen setzt auch die Art der Zeichen fest. — Ueberhaupt ist die Anzahl der Theile einer Größe entweder **bestimmt** oder **unbestimmt**, oder wird als unbestimmt angesehen. Es ist bekannt, daß die erstern mit **Zahlen**, die andern mit **Buchstaben** bezeichnet werden. Jede Zahl **sagt** eine bestimmte Menge **bestimmt**, und jeder Buchstabe **kann** jede bestimmte Menge **bedeuten**. Nur die Findung der unbekannten Größe in Zahlen aus Zahlen ist **gemeine Rechenkunst, gemeine Arithmetik**, wenn dazu nicht mehr Kenntniß gehört, als die Lehre von Proportionen darbietet. Eine bestimmte Grenze aber läßt sich hier nicht ziehen; man kann noch immer gemeiner Arithmetiker seyn, und hat doch schon manche Kenntniß der höhern Arithmetik. Alle Veränderungen der Größen, wenn man sie allgemein betrachtet, und also mit Buchstaben bezeichnet, machen die **Buchstabenrechnung** aus, aber noch nicht die Algebra, wie etliche wähnen. **Algebra**, dieser Hauptzweig der Analysis, ist eigentlich die Lehre von Gleichungen, worin man die verschiedenen Ausdrücke einer Größe, vermöge ihrer Natur mit einander vergleicht. **Analysis** aber ist die große und wichtige Lehre der Mathematik, worin man sich der List zum Finden des Unbekannten bedient, daß man eben so verfährt, als wüßte man es schon,

und bringt durch die Verbindungen, die es mit andern bekannten Größen hat, heraus, wie es sich durch die bekannten Größen bestimmen läßt. Die Alten verstanden die **geometrische Analysis** vortreflich, und haben uns davon Beispiele hinterlassen. Die Neuern haben uns auch eine **arithmetische Analysis** gegeben, welche aus der Buchstabenrechnung und Algebra als ein Ganzes besteht. Diese Analysis mit allen ihren arithmetischen Anwendungen macht das Gebiet der **höhern**; und niedrige und höhere zusammengenommen, macht das erhebliche **Ganze der Arithmetik** aus.

Welche Gegenstände faßt also die Arithmetik! — von der Art und Weise an, wie man sich ausdrücken soll, wenn man sich mehr als Eins denkt, geht sie fort zu den Beziehungen aller nur möglichen Veränderungen und Verbindungen der Vielheiten oder Größen; sie lehrt dann die Veränderungen selbst in mancherlei Beziehungen, und vergleicht entweder zwei Größen selbst, oder die Entstehungsart mit einander, und bereitet den forschenden Rechner vor, auf diesen Grund alles zu bauen, diese Wahrheiten allgemein anwendbar zu machen, und die Früchte seines Fleißes zu erndten. Bald betrachtet sie die Größen nach bestimmten Vielheiten, und bald setzt sie sich über diese einzelne Bestimmtheit hinweg, und drängt alle mögliche Vielheiten in einen Buchstaben zusammen; und hiedurch in Stand gesetzt, durchspähet sie allgemein alle Eigenschaften der Zahlen

und

und die Verbindungen aller Vielheiten, sucht die Arten ihrer Entstehungen, ihre gegenseitige Beziehungen auf, setzt ihre Möglichkeit und Unmöglichkeit fest, und legt ein allgemein anwendbares Gesetz vor, daß dem Befolger mit der süßen Freude eines Archimedes lohnt, und den Uebertreter mit Verwirrung, Verdruß, Zeitverlust und endlich mit Abscheu bestraft. So geht sie fort, und verfolgt selbst relativisch-unendliche Größen von Stufe zu Stufe bis ins Unendliche. —

Und nun ihre **Anwendungen**! — Diese erstrekken sich aus der kleinen Ecke der einfachen Bedürfnisse des Landmanns, bis in das ausgedehnte Gebiet der Staatswirthschaft. — Die Handlung, welche, wo nicht die Mutter, doch die Erzieherinn der Arithmetik ist, hat sich eine treue, unentbehrliche Gehülfinn erzogen, die diese aber bis jetzt aufzumuntern und zu belohnen weiß. Der Kaufmannsjunge und der weitsehende Negoziant braucht ihren Rath nach dem Maße seines Verhältnisses mit der Welt. Der Oekonom frägt sie bei hundert Vorfällen um Rath; dem Juristen hilft sie in hundert Fällen entscheiden; der Kameralist, der Politiker durchwacht in ihrer Gesellschaft manche lange Nacht, wenn ihn Amtspflicht, oder das Wohl seiner Mitbürger dazu auffodert. — Wahrscheinlichkeiten und Hofnungen hat sie zu berechnen angewiesen; man befragt sie um die Lebensdauer der Menschen; sie setzt die Regeln fest, nach welchen so manche, dem Staate wohlthätige und vortheilhafte Einrichtung bestimmt wer-

werden muß: sie beurtheilt das Wachsthum der Bürger eines Staats; — sie würde selbst Vergnügen und Schmerz zu berechnen sich unterstehen; sie würde menschliche Seelen vergleichen, wenn nur hier eine bestimmte Einheit statt finden könnte. — Von der Anwendung in der großen Sphäre der Mathematik, davon — schweige ich.

Daß Adam mit der ganzen Vorwelt keine Begriffe von Zahlen und Rechnen gehabt haben sollte, wer wird das zugeben? daß aber erst die fleißigen und handelnden Phönizier der Arithmetik mehr Aufmerksamkeit gönnten, und dem Systeme näherten, das ist historisch gewiß. Nach und nach wurden **Pythagoras, Euklides, Archimedes, Nikomachus, Diophantus, Jamblichus, Boethius, de Sakrobosko, Peuerbach,** mit mehrern arithmetischen und mathematischen Zeitgenossen der alten und mitlern Zeit gebohren, und waren Liebhaber, Beförderer und Lehrer der Arithmetik, Nachdem nun die allgemein verbreitete Nacht der Unwissenheit verschwand, die alle Wissenschaften überdeckte, so entstanden mehrere Arithmetiker, und sie haben sich bis jetzt so gemehrt, daß ich's kaum wage, nur Einige auszuzeichnen. Die Namen **Riese, Stiefel, Gemma, Apianus, Wells, Newton, Leibnitz, Hospital, Bernoulli** sind zu bekannt, als daß ich von ihren arithmetischen Bemühungen etwas sagen dürfte. Die Arithmetik hat wieder im 18. Jahrhundert die glückliche Zeit erlebt,

lebt, selbst von den größten Männern geliebt und bearbeitet zu werden. Die jetzt ausgebreiteten Zweige der **ökonomischen**, der **juristischen**, der **politischen Rechenkunst** entstanden aus dem Keime den Leibnitz einimpfte, und die Bemühungen eines **Polack's, Unger's, Wiedeburg's, Süßmilch's, Euler's, Lambert's, Kritter's**, — eines **Florencourt's** und **Michelsen's** werden stets erkannt bleiben. Die Arithmetik ist nicht mehr allein das Werk der Rechenmeister, sondern auch die Beschäftigung der Mathematiker; man glaubt nicht mehr, sie gehöre allein für den Kaufmann, sondern der Liebhaber hat das Vergnügen zu sehen, daß sie auch die Großen schätzen.

Periodische Schriften haben alle den Zweck, zu belehren und zu vergnügen; sie schaffen alle, wenn sie diesem Zwecke entsprechen, dem Leser und den Wissenschaften Nutzen. Die wissenschaftlichen Zeitschriften sagen dem Leser das Neue der Wissenschaft die er kennt, die Entdeckungen und Erfindungen in selbiger; sie unterhalten ihn mit einzelnen, oft wichtigen Gegenständen, mit ausführlichen Betrachtungen, die er in Lehrbüchern vermißt. Sie verschaffen ihm die Kenntniß von dem Fortgange und dem ganzen Reiche seiner Wissenschaft. — Aber wozu diese Lobrede? der Nutzen zweckmäßiger Zeitschriften ist bekannt genug.

Warum hat das arithmetische Fach keine Zeitschrift? Ist sie es etwa nicht werth, die Arithmetik, diese Wissenschaft für alle Stände? oder fehlt es ihr an Materie

zu einer solchen Schrift, dieser so ausgebreiteten Wissenschaft? — Ich schauete umher; und wie viel fand ich in dem Gebiete der Arithmetik, was für eine solche Schrift brauchbar wäre! — Hier belohnt die Arithmetik den forschenden Rechner mit einer neuen Erfindung, und dort giebt sie einem andern durch den Zufall noch unbekannte Vortheile, die der Erste mühsam suchte. Hier findet der denkende arithmetische Kopf eine Lücke, die er ergänzt, oder ihre Ergänzung wünscht, und dort ein andrer in der Anwendung noch Unbestimmtheit, die er zu bestimmen unternimmt. Hier wendet der Arithmetiker seine Musse an, die gemeine Rechenkunst zu erweitern, und dort sitzt der Algebraist und denkt, die für ihm bestimmten Rechnungen dem gemeinen Rechner zu erleichtern. Bald wünscht der sorgsame Lehrer, die bewährt befundene Unterrichtsmethode bekannt zu machen, um das Schicksahl seiner Mitbrüder zu erleichtern. Bald wünscht der denkende Arithmetiker, der Geschäftsmann Nachrichten, Auflösungen, die ihm und manchem andern nützlich sind, und die er nicht zu erfragen weiß. — Allen diesen wäre eine solche Schrift nütze, um ihre Erfindungen, Entdeckungen, Aufklärungen, Bestimmungen, Erweiterungen, Erleichterungen den Liebhabern der Arithmetik bekannt zu machen, und die Letzteren wegen ihrer Anfragen und Aufgaben um Belehrung zu bitten. Und was würde sie nicht dem Leser nützen? — Diese Betrachtungen waren es, daß mein Gedanke zum Entschluß, und der Entschluß zur That reifte.

Soll

Soll ich nun auch noch von dem Plane der Ausführung Rechenschaft geben? — Gern; ich lege hiemit Plan und Rechtfertigung den Kennern zur Prüfung vor. Sie werden es mir sagen, was an der Vollkommenheit fehlt, und die Mittel zur Verbesserung vorschlagen, die ich befolgen werde. Ihren belehrenden Tadel werde ich als Freundschaft betrachten, dankbar annehmen und benutzen. Von Ihren Beyfall wird es abhängen, ob ich Ermunterung verdiene, und die That werth genug zu achten habe, mehr als diesen **Versuch** zu wagen: denn **Versuch** mehr ist und kann es jezt nicht seyn. — Als eine **stehende** Rubrik würden

1) **Ungedruckte Original-Abhandlungen** anzusehen seyn; denn hierzu sehe ich eine Menge Materialien vorhanden. Nur Eine Aussicht zu diesen Materialien anzugeben, darf ich nur sagen, daß eine Revision der bekannten und neuen oft so hoch gepriesenen Rechnungsarten und Vortheile, welches, wie ich glaube, immer eine der interessantesten Gegenstände des spekulirenden Rechners seyn muß, schon reichen Stoff zu dieser Rubrik hergebe. Denn Vortheile sind nicht immer Vortheile, sondern die vorhandenen Umstände bestimmen ihren Werth; und manche noch so hochgerühmte sind — gar keine. Und was geben alle anderen Gegenstände aus dem Gebiete der Arithmetik hierzu nicht für Materialien her! —

Betrachtet man die Menge der einzelnen Abhandlungen die eigentlich in das Fach des Arithmetikers gehören,

hören, die hie und da in periodischen und andern Schrifsten zerstreuet und versteckt sind, so wäre doch eine Sammlung derselben, besonders derjenigen die es werth sind, zu wünschen, oder wenigstens Auszugsweise dem Rechner aufzubewahren. Man hat ja blos Sammlungen von Abhandlungen in andern Wissenschaften, um dem Liebhaber einer Wissenschaft das zu lesen zu geben, was er sonst ohnmöglich alle lesen könnte: und dieser Fall trift auch besonders den Liebhaber der Arithmetik. Zu dieser Sammlung ist also die zweite Rubrik bestimmt, welche auch allzeit stehend bleiben kann.

Oft hat der Ausländer oder der ausländische Einheimische Betrachtungen über Gegenstände angestellt, die dem deutschen Rechner wichtig sind, und diese können durch **Uebersetzungen** ihm bekannt werden. Diesen soll die dritte Stelle meines Magazins gewidmet seyn, wenn welche vorhanden sind.

Wer kennt nicht die Menge der Rechenbücher, Algebraen, und weiß nicht, wie oft sich Spreu unter dem guten Saamen findet? Insgemein haben die schlechtesten Werke die vielversprechendsten Titel: wie soll da der Liebhaber, der Anfänger, wählen? Und kann man wol die mehrsten arithmetischen Schriften lesen und besitzen? Auch erkennt man den Werth eines Buchs erst durch vieljährigen Gebrauch am besten, und oft ein schon vergessenes ist des Bekanntmachens werth. Dieses bestimmt die wichtige vierte Rubrik: die **Nachrichten, Auszüge und Rezensionen arithmetischer**

scher Schriften. Sie wird theils Nachrichten von alten Schriften, welche Seltenheit oder innerer Werth dazu qualifizirt, als insbesondere die von neuern Schriften enthalten. — Nur gesunde Kritik und bescheidener, gegründeter Tadel findet in den Rezensionen Statt.

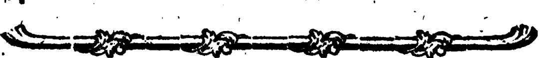
Ausser diesem bleibt dem Rechner manches zu wünschen übrig: und hierzu habe ich eine fünfte Rubrik erwählt, welche dies alles unter den Titel: **Vermischte Nachrichten und Anzeigen** sammlet. Die Nachrichten von der Einrichtung, für das allgemeine oder privat Interesse errichteten Kassen, und deren Veränderungen, müssen für den politischen etc. Rechner angenehm seyn, und geben oft zu fernern Nachdenken Anlaß. — Wie oft wünscht sich der Rechner von Dingen zu belehren, die sein Mitliebhaber ihm sagen würde, wenn er es wüßte, und diesem stehet der Weg offen, seine Anfragen und Ersuchen bekannt zu machen. Eben so wünscht der eine Rechner die Auflösung, einer seine Kräfte übersteigenden Aufgabe, oder legt solche in der Absicht vor, um eine vortheilhaftere Art der Auflösung von andern zu erfahren: und für diese gilt die Rubrik der Aufgaben. Nur durch vorgelegte Aufgaben angefeuert erfand Tartaglia des Cardon's (eigentlich Tartaglia's) Regel, und triumphirte über Antonia del Fiore der ihn durch die Aufgaben demüthigen wollte. — Die etwa aufgegebene Preisaufgaben gehörten auch hierher. **Mein Wunsch, wenn mich eine gute Aufnahme unterstützte, jährlich über einen arithmeti-**

metischen Gegenstand einen Preis auszusetzen ist — nur Wunsch geblieben, und ich muß dies Versprechen hiemit aufrufen. — Anzeigen unternommener arithmetischer Arbeiten gehören auch hieher, und würde den Verfassern, wenn sie überzeugt sind, daß die Arbeit die Aufmerksamkeit des Publikums verdiene, zur vorläufigen Ankündigung ihrer Werke dienen; auch kurze Probestücke fänden hier ihren Platz. Diese Anzeigen würden dann, so wie auch die Pränumerations- oder Subscriptions-Anzeigen aller in das arithmetische Fach einschlagenden Werke den Lesern bekannt, für welche die Werke eigentlich bestimmt sind. Kurz, diese fünfte Rubrik wäre die Nachlese desjenigen, was in die andern nicht zu bringen wäre, und doch dem Rechner nützlich seyn würde.

Leser! sehen Sie, das ist der Gegenstand, der Zweck und der Plan dieses Unternehmens: wird es Ihren Beifall verdienen, so werde ich für meine Mühe belohnt seyn, und meine Sorgfalt verdoppelt werden, um es möglichst vollkommen, möglichst nützlich zu machen.



II. Be-



II. Beantwortung der Frage: Ist die Kettenregel und die Reesische Regel unterschieden?

§. 1.

Der Name Kettenregel reizt jezt jeden Jüngling, der Lernbegierde in sich fühlt, und dessen einstmalige Bestimmung Rechnungskentniß zu erfordern scheinet. Der allgemeine Ruf von ihren Vortheilen hat ihr überall Freunde erworben, und selbst der jezt schon verjährte Geschäftsmann wünscht sie zu kennen: und sie verdient es auch, die leichte Kettenregel. Zweierlei möchte ich aber für die Ausbreitung dieser Regel, so wie der ganzen Arithmetik wünschen, nemlich: dem Schüler einen sachverständigen Lehrer, und dem Lehrer einen fleißigen und ausdauernden Schüler. — Glücklich wären wir, wenn doch einmal die Lehrer der Arithmetik in den Stadtschulen, **wenigstens bei den Hauptsachen** dem Schüler die Frage: **Warum das so?** beantworten könnten: und dies bischen Theorie wäre gewiß doch noch kein Meisterstück. Lieber keine Regel Falsi und Cözi gewußt, und sagen können, warum z. B. in der Kettenregel aus den beiden Kolummen-Zahlen, wenn man das Produkt der andern durch das Produkt der ersten dividirt, hieraus nothwendig das

das richtige Facit kommen muß? — Aber der beste Lehrer kann unfleißigen und nachläßigen Schülern auch nichts lehren. Lauter erwünschte Schüler erhält man nie; aber unter der Menge sind doch immer etliche, die bei einem gut geordneten Unterrichte dem Lehrer Freude machen. Und diese sind glücklich, wenn sie einen Mann von Kenntnissen zum Lehrer haben; die andern werden dem Lehrer diesen Ruhm nicht rauben können. Noch ein Uebel ist aber oft dem besten Lehrer, sonderlich bei erwachsenen Schülern entgegen: — das **Meistern**. Jeder Lehrer befolgt seine eigene, oft schon bewährte Unterrichtsmethode, und der Schüler, ohngeachtet er die Folgen dieser Methode nicht durchschauet, wird sein Kritikus. — Aber, wo gerathe ich hin? Die Hand von der Tafel!

§. 2.

Der Name des Erfinders dieser so nützlichen Rechnungsart, der Kettenregel, scheint in die Nacht der Vergessenheit vergraben zu seyn: zum wenigsten hat, so viel ich weiß, ihn noch niemand genennet. **Petrus Apianus**, *) soll im sechzehnten Jahrhundert schon Kettenregel gerechnet haben, und etwas spä-

ter,

*) Hievon müßte sich in dessen Neue und wohlgegründete Unterweisung aller Kaufmannsrechnungen in drey Büchern (1527, auch 1537, 1543 und 1564) etwas finden; denn mehrere arithmetische Schriften sind mir von ihm nicht bekannt. Dies Buch wünschte ich zu bekommen.

ter, in der Mitte des vorigen Jahrhunderts, bedienten sich ihrer die Kaufleute und Wechsler zu Vergleichung verschiedener Münzen, Gewicht u. s. w. und bei Wechselarbitragen, aber dies war ihr einziger und doch nicht häufiger Gebrauch. *) (Von den Franzosen wird sie daher außer la Regle Conjointe, die Kettenregel, auch la Regle des Arbitrages, die Arbitragenregel genannt.)

Wer der Erfinder davon sey, bleibt noch immer die Frage; und derjenige würde die Liebhaber der arithmetischen Litteratur verbinden, welcher den Namen des Erfinders der Vergessenheit entreißen, und diese Lücke in der Geschichte der Rechenkunst ausfüllen könnte.

§. 3.

Glücklicher hat dagegen die Zeit für das Andenken eines Mannes gesorgt, der der praktischen Rechenkunst einen eben so wichtigen Dienst, als der Erfinder der Kettenregel geleistet hat. Rees, ein Holländer, erfand im Anfange unsers Jahrhunderts eine Setzungsart deren Gebiete ausgedehnter, auf die geometrische Proportion allgemein passend ist. Rees lehrte sie in Holland und machte sie auch in einer Abhandlung bekannt, welche Herr Hofrath Kahle ins Französische, aus

dieser

**) Man sehe davon unter andern Claire-Combe nouvelle & Universelle pratique d'Arithmetique. 1702. p. 298. f. Auch Poetii Anleitung zur arithmetischen Wissenschaft, 1728. S. 370.

dieser Uebersetzung, hernach aber der Herr Sekretair Willig ins Deutsche übersetzte, welche letztere er bey der zwoten Auflage vermehrte. Diese verbesserte Ausgabe hat noch 3 Auflagen gehabt. So kam diese zu uns Deutsche und wurde allgemein bekannt; doch aber betrachtete man sie bald, wie mit der Kettenregel einerlei.

§. 4.

Vor ein paar Jahren, als ich mich mit einem Freunde über arithmetische Gegenstände unterhielt, kam man unvermerkt auf die Frage: Ist die Reesische Regel mit der Kettenregel einerley oder verschieden? Mein Freund behauptete das erste, und suchte mich durch arithmetische Schriftsteller zu überführen, und ich behauptete das letztere, ohne einen sicheren mathematischen Grund für mich gleich auf der Stelle anführen zu können: denn die Untersuchung war neu, und gelesen hatte ich über die Gleichheit oder Verschiedenheit der beiden Regeln auch nichts. Nichts also war die Stütze meiner Behauptung, als, daß wenn sie einerley seyn würden, doch Männer, welche von der Reesischen Regel geschrieben hätten, diese Einerleiheit bei ihren Untersuchungen gefunden, und ihr nicht den Werth einer neuen Erfindung zugeschrieben haben würden. Von der Zeit an aber machte ich selbst eine Untersuchung, und hier ist davon das Resultat.

§. 5.

Zuerst wandte ich mich zu den besten, insbesondere mathematischen Schriften, um die Gedanken über diesen Gegenstand von andern zu erfahren: aber welche Verschiedenheit! In einigen fand ich das, was andere Reesens Regel nennen, als Kettenregel vorgetragen, einige reden blos von **Rees**, andere kennen nur Kettenregel, Regel Multiplex, vielfache Regeldetri u. s. w. Ueberall fand ich, daß die bloßen Rechenbücher Rees weniger nannten, als die mathematischen Anweisungen zur Arithmetik. **Kästner hat** *) **Rees** nicht genannt, und **scheint** doch die Kettenregel von seiner Regel zu unterscheiden. Zuerst beweiset Er (S. 137. §. 50.) den Lehrsatz: daß, wenn man zwey Proportionen mit einander multipliciret, die Producte eine neue Proportion geben. Hieraus leitet Er (§. 53.) zuerst die Auflösung der **Regel von fünfen** her, und sagt darauf (§. 56.) „**Eine andere Anwendung** (von §. 59.) zeigt sich bei der Vergleichung verschiedener genannten Zahlen, als Münzen, Maaße u. s. w. z. B. wenn 3 Mariengr. = 2 ggr. und 16 ggr. = 1 Gulden, und 3 Gulden = 2 Thaler und 11 Thaler = 4 Ducaten, so frägt es sich wie viel Mariengr. auf den Ducaten gehen: Hier ist

2:3

*) In seinen Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie. 1774.

2 : 3 = Mgr. : Gutegr.
1 : 16 = Ggr. : Gulden
2 : 3 = Gulden : Thaler
4 : 11 = Thaler : Ducaten.

Man hat dieses Verfahren die Kettenregel genannt." Also ist hiernach diese andere Anwendung jenes Lehrsatzes nur Kettenregel, die erstere aber, die sich auf die Regel Quinque bezieht, keine. Es ist aber bekannt, und wir werden uns in der Folge davon noch mehr überzeugen, daß Reesens Regel auf diese besonders Anwendung findet.

Clemm redet in seinem **Ersten Gründen aller mathematischen Wissenschaften** §. 80. von der Entstehung der Kettenregel aus der Theorie, ohne Anwendung und ohne einen Unterschied derselben von der Reesischen Regel anzugeben: wol aber von den Anwendungen, die einzig für diese gehören. Deutlich aber unterscheidet derselbe Kettenregel von Reesischer Regel in seinem **mathematischen Lehrbuche**: man lese nur die beiden §phen 380 und 381. Er scheint daselbst (§. 380.) die Reesische Regel als eine Regel, worin man die Regeldetri **nur** 2 mal anbringt, zu erklären: "denn die Kettenregel ist die vorige (die Regeldetri) sagt Er, aber nur so, daß man die Regeldetri **nicht nur** 2, sondern 3, 4, 5 und mehrmahlen dabei anbringt,, und keine besondere Rechnungsregel für sich. In dem folgenden (381. §.) sieht man aber für jede eine besondere Regel, auch die für jede Regel bestimmte Beispiele unterscheiden sich.

Häseler *) hat Clemm gefolgt, und es ist bei ihm die Kettenregel eine vielmahlige Anwendung der Regel-detri zu Auflösung einer Aufgabe, wozu Reesens Regel erst die Mittel an die Hand giebt, diese Kettenregel auf eine bequeme Art in zwey Kolumnen zu setzen.

Keiner unterscheidet besser diese beiden Regeln von einander als **Mönnich.** **) Gröstentheils liegt der Unterschied in den Regeln von beiden selbst, und soll ein Unterschied vorhanden seyn, so muß der schon in der Theorie der Proportionen gegründet seyn. Ich würde zu weitläuftig werden, hier seine Gründe herzusetzen; ich bitte Sie daher, meine Leser, sie im Buche selbst zu lesen: weil es überhaupt ein Buch ist, welches ohne Zweifel für eins der besten mathematischen Kompendia gehalten werden muß, und ich in den Händen aller Liebhaber der Mathematik wünschte.

Büsch setzt in seinem vortreflichen **Versuche einer Mathematik** rc. 1e Abth. §. 8. folgendes Beispiel: Wenn die Zinsen eines Kapitals von 30000 Thlr. Kourant für ein ganzes Jahr in dem Verhältnisse 100 : 4 festgesetzt sind, und die Zeit des Ausstehens des Kapitals 3 Jahre ist, ferner, wenn ausgemacht worden, daß die

*) In seinen Anfangsgründen der Arithm. Geom. und Trigon. und in seinen Auszuge aus diesen Anfangsgründen.

**) In seinem Lehrbuche der Mathematik für diejenigen die solche bei einem andern Hauptgeschäfte nützen wollen, 1r Bd. 1e Abtheil. §. 184 und folgende.

die Zinsen allemal in Bankogeld in dem Verhältniß 120 : 100 bezahlt werden sollen, und hieraus die Zinsen von dem Kapitale in 3 Jahren in Banko zu berechnen. „Man setze 1) wie 100 : 4 so verhält sich 30000 zu 1200, das ist, denen Zinsen, die für ein Jahr zu bezahlen wären. 2) wie ein Jahr zu 3 Jahren, so verhalten sich 1200 Mark zu 3600 Mark den Zinsen für 3 Jahre. Endlich 3) wie 120 sich zu 100 verhält, so verhalten sich 3600 Mark Kourant zu 3000 Mark Banko. Allein es lässet sich aus der Natur der Verhältnisse und Proportionen erweisen, daß sich diese Zahl unmittelbar aus der Zahl 30000 Mark finden lasse, wenn man die Zahlen der Verhältnisse, aus welchen dieselbe bestimmet werden muß, gehörig untereinander ordnet, sie durch einander multipliciret und zu ihren Produkten und der Zahl 30000 die vierte Proportionalzahl sucht.“ Hiernach kömmt alsdenn der Rechnungssatz so:

100	:	4
1	:	3
120	:	100
		30000
12000		36000000

Erstere in die leztere Zahl dividiret, giebt das Facit 3000 Mark Banko. — **Dies ist die bekannte Kettenrechnung.** Das sind ohngefehr seine Worte.

Ver-

Vergleicht man dies mit den vorher angeführten Schriften aufmerksam, so wird man einen Widerspruch finden: auffallender wird es aber noch seyn, daß der Satz des Exempels gar nicht mit dem allgemeinen Begriffe von Kettenrechnung und deren bekannten Regel übereinstimmt.

Schmid sagt in der Vorrede seiner Rechenkunst in zwei Theilen „**Rees hat die Kettenregel erst in Aufnahme gebracht,**" und hat weiter nichts von Rees und seiner Regel gesagt. Hat Rees die Kettenregel in Aufnahme gebracht, so muß er dieselbe erweitert oder nur durch besondere Bemühungen dieselbe bekannter und anwendbarer gemacht haben; eine neue Regel aber hat er dann nicht erfunden, sondern seine Regel war Kettenregel.

Unmöglich kann ich alle Schriften anführen welche ich über diesen Gegenstand nachgeschlagen habe; und die angeführten sind auch zu meinem Zwecke genug. In manchem mathematischen Lehrbuche wird keine von beiden Regeln gedacht. In vielen, auch den besten Unterweisungen zur Arithmetik findet man kein Wort von Rees und Reesischer Regel, und es ist bei ihnen nur Kettenregel, Regelmultiplex, zusammengesezte Regeldetri zu finden. Alle diese Namen bezeichnen aber einerlei Sache. Stellt man eine nur kleine Untersuchung an, so wird man finden, daß in den mehrsten Rechenbüchern, die Regel Konversa, Regelquinque u. s. w. und alles was zu diesem Gefolge gehöret, nicht

mit

mit zur Kettenregel gerechnet wird; oder unter dem Namen Kettenregel Reesisch bearbeitet worden.

§. 6.

Was fand ich nun durch diese Untersuchung der Schriftsteller über diesen Gegenstand? Nichts, als ich wurde von der Wahrheit bestätiget, daß sie darüber nicht einig sind. Kettenregel muß aber doch eins von beiden seyn, — entweder mit der Reesischen einerlei oder nicht. Auf welche Seite sollte ich mich wenden? Dies zu entscheiden mußte ich also eine andere Untersuchung wagen; eine Untersuchung welche auf die Regel und die Theorie beider Rechnungsmanieren gegründet war. Hier ist sie.

§. 7.

Daß die Kettenregel ehe bekannt gewesen, wie die Reesische, dies kann kein Grund einer Verschiedenheit seyn: denn wenn man sagt: Rees hat die Kettenregel in Aufnahme gebracht, so ist dieser Grund dahin, zum wenigsten geschwächt. Die Regeln einer jeden mit der Theorie worauf sich diese Stütze vereint, müssen ohne Zweifel die Einerleiheit, oder die Verschiedenheit und ihre Grenzen anweisen. Denn wenn man jede Regel auf ihren Ursprung, auf die Proportionen zurückführet, müssen dann nicht, wenn sie einerlei seyn sollen, auch diese Proportionen einerlei Eigenschaften an sich haben? Dies werde ich auch in der Folge untersuchen, vorher

aber

aber die Vorfälle im Leben, oder die Exempel, worauf Ketten- und Reesische Regel angewandt werden kann, in zwei Klassen theilen, um dadurch demnächst den Unterschied beider Regeln, den nicht theoretischen Lesern deutlicher machen zu können.

§. 8.

Alle Rechnungsvorfälle lassen sich in zwei Klassen eintheilen. **Die Erste: worin eine Größe durch eine einzige andere bestimmt wird**, oder man kann sagen, **worin sich zwei Größen immer wechselsweise bestimmen.** z. B. 24 Ellen kosten 5 Thlr. so bestimmen die 24 Ellen die 5 Thlr. oder die 5 Thlr. gegenseitig die 24 Ellen. Gesetzt nun, man hat folgenden Rechnungsvorfall: Man wisse daß 100 Pfund einer gewissen Waare 40 Thlr. Hannövrisch Kourant kosten, und ferner, daß 130 Thlr. Hannöverisch Kourant 100 Thlr. Hamburger Banko, so wie 100 Thlr. Hamb. Banko 152 Thlr. Preußisch Kourant ausmachen, und man wollte aus diesen Angaben den Werth von 840 Pfunden in Preuß. Kourant berechnen, so bestimmen: 1) 100 Pfund die 40 Thlr. oder diese jene; 2) die 130 Thlr. Hann. Kour. die 100 Thlr. Hamburger Banko oder diese jene; 3) die 100 Thlr. Hamb. Banko die 152 Thlr. Preußisch Kourant, und 4) die 840 Pfund, bestimmen die noch unbekannten Thaler Preußisch Kourant. In diesem Beispiele bestimmt also immer eine Größe eine einzige an-

andere: und dies geschiehet in allen Vorfällen, welche durch eine ein- oder mehrmalige Anwendung der Regeldetri direkta aufgelöset werden. Warum auch nicht auf die, die zur Regeldetri inversa gehören? Das werde ich gleich sagen.

Die zweite Klasse. Zu dieser gehören alle Vorfälle **worin eine Größe durch zwei oder mehrere andere bestimmt wird,** oder diese jene bestimmen. z. B. Soll ein Feld beackert werden, so ist die Größe der Beackerung der Größe des Feldes gleich; Diese aber kann nicht entstehen, wenn nicht Menschen oder Thiere und Zeit dazu genommen werden; also bestimmen 12 Menschen und 4 Tage die Beackerung von 16 Morgen, oder die 16 Morgen bestimmen jene zu ihrer Bearbeitung nöthige 12 Menschen und 4 Tage. Eben so ist es mit Kapital und Zeit, welche die Zinsen bestimmen, und mehrern andern Dingen. Weiß man aus Erfahrung, daß 12 Arbeiter, die täglich 10 Stunden und wöchentlich 6 Tage arbeiten, einen Graben, der 100 Ruthen lang, 2 breit und 2 tief ist, in 4 Wochen ausgraben; so bestimmen in dieser Erfahrung die 12 Arbeiter, mit der Zeit, den 10 Stunden, 6 Tagen und 4 Wochen zusammen, die Größe des Grabens, nach seiner 100 Ruthen Länge, 2 Ruthen Breite und 2 Ruthen Tiefe, oder diese Abmessungen des Grabenraums bestimmen jene Arbeiter, und die in verschiedenen einzelnen Bestimmungen bekannte Zeit.

Eigent-

Eigentlich kann man sagen, daß hier nicht mehr wie zwei Dinge ein drittes bestimmen: nemlich, allezeit die Ursache und Zeit bestimmen die Wirkung. Denn die vielen gegebenen Data bestimmen nur diese drei Hauptgegenstände näher, und machen nicht immer ganz besondere Arten von Dingen aus, sondern lassen sich unter jene drei Gattungen bringen. z. B. jene 4 Wochen, 6 Tage und 10 Stunden sind alle Bestimmungen der Zeit, und zwar in Stunden, so wie jene 100 Ruthen Länge, 2 Breite und 2 Tiefe die Bestimmungen der Würkung der Arbeit ausmachen.

Die Vorfälle die man in der Rechenkunst insgemein zur verkehrten Regeldetri, oder Regel Conversa oder Inversa rechnet, sind eigentlich von der Art, daß die Grössen derselben sich so wie Ursachen, Zeiten und Würkungen bestimmen, aber alsdenn nur, wenn aus der einen Bestimmung eine andere zur Vollständigkeit gebracht werden soll, in beiden Bestimmungen aber gleiche Würkungen vorkommen, und nach der Zeit oder Ursach die Frage ist. Ich darf diese Behauptung hier nicht umständlich beweisen, um nicht auszuschweifen, und will sie nur an einem Exempel erklären. 4 Schreiber schreiben in 8 Tagen 600 Bogen; frägt man nun, in wie viel Zeit 6 Schreiber die 600 Bogen schreiben, so ist die Aufgabe aus der einfachen Regel inversa und man kann sie so geben: 4 Schreiber schreiben eine Anzahl Bogen in 8 Tagen, wie lange bringen 6 Schreiber darauf zu? Es ist nemlich die Würkung oder hier

die

die Arbeit gleich, und nach der Zeit ist die Frage, und diese muß so abnehmen, wie die Ursache, die Schreiber, bey gleichen Würkungen zunehmen. Sind die Würkungen nicht einander gleich, und es ist nach der Ursache oder Zeit die Frage, so entstehet daraus die zusammengesetzte Regeldetri. Zu dieser zweiten Klasse der Rechnungsvorfälle, gehöret also die ganze Reihe von Regeln, die Regelquinque, Regelinversa, simplexa und komposita, Regelseptem, Regula komposita reciproka reciproka — und wie sie alle heißen.

Anmerk. Eine Fläche wird aus der Länge und Breite, Körperraum aber durch Länge, Breite oder Dicke, und Höhe oder Tiefe bestimmet. Es sind dies zwar nur blos Ursachen die ohne Zeit die Größe bestimmen; es ist aber auch die Art der Bestimmung ganz anders. Weil aber doch mehrere Größen Eine bestimmen, so kann man die Berechnung dieser Größen mit zu jenen Fällen rechnen.

§. 9.

Nun bin ich im Stande, den untheoretischen Lesern, die Grenze zwischen beiden Regeln, der Kette und Reesens Regel genugsam abzustecken: aber wie bestimme ich diese Grenze? Wenn die Regeln beider Setzungsmethoden *) sich auf einerlei Vorfälle

an=

*) Denn weiter ist es doch nichts; die Berechnungsregeln sind sowol bei der Kettenregel als bei der Reesischen Regel einerlei.

anwenden lassen, und die Anwendung einerlei Satz hervorbringt, so müssen sie beide einerlei seyn, ist dies aber nicht, so sind sie gewiß verschieden, und wenn man **nicht aus den Proportionen beweisen kann, daß jede Regel auf besondern Gründen ruhet, und keine gegründete Kennzeichen angeben kann,** worin der Unterschied liegen sollte, so sind sie gewiß für einerlei zu halten; wenn man aber das kann, braucht man denn mehrere Beweise für die Verschiedenheit?

§. 10.

Zusammenhang und Deutlichkeit verbindet mich, die Setzungs-Regeln beider Methoden hieher zu setzen. Die Regel für die Kette ist bestimmter, aber die für Reesens Methode leidet oft mehr Ausnahmen, als die grammatikalischen Regeln, wie sich Clemm ausdrückt, und fast in jedem andern Buche, welches sie abhandelt, findet man eine andere Regel. Ich werde die ursprüngliche von Rees selbst nehmen, welche, wie mir deucht, immer noch die beste ist.

Die Regel für die Kette ist: Man fängt (insgemein) mit der Frage an, und selbiger gegenüber setzt man rechter Hand die Zahl, wovon etwas gefraget wird oder die Fragezahl. Linker Hand setzt man alsdann von dem gegebenen diejenige Zahl, die mit der letzten zur rechten am **Namen gleich** ist, und dieser gegenüber, die Zahl die der ebengesetzten zur Linken am

Werthe

Werthe gleich geachtet wird. Dies setzt man fort, bis daß zur Rechten eine Zahl kömmt, die mit der Frage von einerlei Art ist. Hieraus entstehet denn immer ein Satz, worin immer das Glied in der Kolumme zur Rechten mit dem nachfolgenden zur Linken gleichartig ist — eine der Kette ganz wesentliche Eigenschaft, und wahrscheinlich war's diese Eigenschaft, welche dieser Setzungsart ihren Namen gab.

Reesens Methode hat folgende Regel: Man muß alle Zahlen, die in einer Aufgabe befindlich sind, in zwei Kolummen schreiben, und zwar müssen die Zahlen, deren eine aus der andern bestimmet wird, nicht in einerlei sondern in verschiedene Kolummen gesetzet werden. Es müssen dadurch in einer Kolumme die Namen der Dinge mit ihren zugehörigen Zahlen so oft vorkommen, als in der andern. Dies sind ohngefehr Rees eigene Worte. *)

§. 11.

Nun wollen wir sehen, was aus der Anwendung dieser beiden Regeln auf einerlei Aufgaben folgt, Gleichheit oder Ungleichheit. Zu diesem Ende setze ich folgende zwei Exempel. 1) Dasjenige was ich zur Erläuterung im Anfange des 8ten §. gab, und meine Leser

*) Allgemeine Regeln der Rechenkunst v. K. f. de Rees 1762. S. 9. Willig's gründliche Vorstellung der Reesischen allgem. Regel, 1r Bd. 1. 2. §.

ser nachzusehen bitte. 2) Wie viel Thaler Zinsen geben 4000 Thlr. in 6 Jahren, wenn 100 Thlr. in einem Jahre 4 Thlr. Zinsen geben. Beide leichte Exempel.

Zu Auflösung des ersten nach der Kette, wäre die Frage: Wie viel Thlr. Pr. Kour. ? der Anfang des Satzes und 840 Pfund die Fragezahl und folgt sehr leicht aus der Regel folgender Aufsatz:

? Thlr. Pr. Kour. —— 840 Pfund
100 Pfund —— —— 40 Thlr. Han. Kour.
130 Thlr. Han. K. —— 100 Thl. Hamb. Bko.
100 Thlr. Hamb. Bko. — 152 Thlr. Pr. Kour.

Facit $392\frac{56}{65}$ Thlr. Pr. Kour.

Dies war also der richtige Kettensatz: wie siehet aber dieser nach Reesens Regel aus? — Eben so, oder wenn man will, anders. Reesens Regel bestimmet uns gar keine genaue Folge der Glieder; es ist genung, wenn die Zahlen, die einander bestimmen, nicht in einerlei Kolumnen, und die Namen die in der einen Kolumne sind, auch in der andern stehen. Der Rechner hat die Wahl, wie er übrigens ordnen will; ordnet er so wie es die Kettenfolge fordert, so gehet er gewiß am sichersten; aber dann setzt er Kette und will doch Reesische Regel setzen. Setzet er so nicht, so muß er sich der Leitung der Theorie gewiß seyn, sonst kann er leicht fehlen. *)

Nach

*) Gewiß war dies die Ursache, warum Willig in der Anwendung der Reesischen Regel auf diese Art Aufgaben und über:

Nach Reesens Regel kann also der Aufsatz des Exempels eben so wie der vorige seyn, oder auch

? Thlr. Pr. Kour.	—	840 Pfund
100 Thlr. Hamb. Bko.	—	152 Thlr. Pr. Kour.
130 Thlr. Han. K.	—	100 Thl. Hamb. Bko.
100 Pfund	— —	40 Thlr. Han. Kour.

oder wenn man will, wol gar so:

100 Pfund	840 Pfund
100 Thlr. Hamb. Bko.	100 Thlr. Hamb. Bko.
? Thlr. Pr. Kour.	40 Thlr. Han. Kour.
130 Thlr. Han. Kour.	152 Thlr. Pr. Kour.

denn man hat dennoch dem Gesetze nachgelebet. Aber welcher Rechner ist, der, wenn er nicht immer bei jedem Satze theoretische Betrachtungen anstellen will, für die Richtigkeit, besonders längerer Aufsätze einstehet? Und soll er Betrachtungen anstellen, wird er da nicht lieber ganz aus den Proportionen sein Facit suchen, als sich bei ebendemselben Nachdenken noch an eine besondere Regel binden? Wie aber wird es für den blos practischen Rechner aussehen? Lobenswerth ist's also, daß Willig und andere die Reesische Regel auf den Fuß der Kettenregel einführten.

Weil

überhaupt so oft wie möglich sich der Kettenfolge bedienet hat, weil der nicht genug theoretische Rechner dann sicher gehet. Einige neuere Schriftsteller, wie z. B. N. Schmid thun es nicht. Ich glaube aber auch, daß dies eine Ursache mit ist woher es gekommen, Ketten- und Reesische Regel für einerlei zu halten.

Weil nun in dieser Art Aufgaben, nemlich worin eine Größe nur eine einzige andere bestimmet, der Reesische Satz auch Kettensatz seyn kann, so entscheidet dies nichts für eine Verschiedenheit beider Regeln, sondern macht es wahrscheinlicher, daß sie einerlei wären. Aber weiter —.

§. 12.

Wir wollen das zweite Exempel vornehmen: wie würde das im Kettensatze aussehen? — Das kann ich Ihnen nicht sagen, meine Leser; ich kann davon keinen Aufsatz machen, ohne nicht gleich gegen die Gesetze der Kettenregel zu sündigen: das heißt also: es findet hier keine statt.

Machen Sie selbst den geringsten Versuch davon.

A. ? Thlr. Zinsen —— 4000 Thlr. Kap.
100 Thlr. Kap. —— 4 Thlr. Zinsen —

ja, so weit ist's regelmäßig: aber nun weiter! wo bleiben die Jahre im Exempel? — Vielleicht erfordert die Aufgabe zwei Aufsätze? — Gut, auch dies wollen wir probiren, und sehen was folgt. Der erste wäre der eben hingesetzte woraus 160 Thlr. Zinsen entstehen, und also wäre

B. ? Thlr. Zinsen —— 6 Jahr
1 Jahr —— —— 160 Thlr. Zinsen

der andere, woraus 960 Thlr. Zinse entstehen. Sind aber diese beiden Sätze A und B Kettensätze? — Keinesweges. Kettensätze finden da nur statt, wo eine

Zahl,

Zahl, nach zusammengesetzten Verhältnissen, und wozu also nothwendig wenigstens zwei gehören, verändert wird; hier ist aber die Fragezahl nur nach einen einfachen Verhältniß verändert. Nun ist eine andere Wendung nicht möglich; folglich ist man hier am Grenzsteine der Kettenregel.

Reesens Regel verläßt uns hier nicht, sondern giebt uns den ohnfehlbaren Satz an. In unserm Beispiele wird allemal die Zinse durchs Kapital und die Zeit bestimmt, folglich muß bei dieser Methode, wenn man Zinsen in die eine Kolumme setzt, Ursache und Zeit in der andern Kolumme stehen; und dann wird von selbst der Zusatz bestimmt werden, daß in einer Kolumme die Nahmen der Dinge so oft vorkommen, als in der andern. Der beste Aufsatz wäre dieser:

? Thlr. Zins. —— { 4000 Thlr. Kap.
6 Jahre.

100 Thlr. Kap.
1 Jahr } —— 4 Thlr. Zinsen.

Freilich kann der Rechner jede andere Ordnung wählen, wenn er nur die Regel nicht übertritt. Er kann z. B. so setzen:

? Thlr. Zinsen	4 Thlr. Zinsen
100 Thlr. Kap.	4000 Thlr. Kap.
1 Jahr	6 Jahr

Der Rechner mag ordnen wie er will, genug für mich, wenn man siehet, daß die Reesische Methode sich weiter aus-

ausdehnet, und da durchhilft, wo die Kettenregel uns im Stiche läßt. — Es ist aber dies Beispiel von der Art daß immer zwei Größen eine andere bestimmen; folglich erstrecket sich die Kettenregel auf die zweite Klasse der Rechnungsvorfälle (§. 8.) nicht, sondern blos auf die erste. Jeder neue Versuch mit Beispielen ein und anderer Art, wird, wenn man richtig nach den Regeln verfährt, dies bestätigen.

§. 13.

Folgendes Beispiel gehöret in die einfache Regel inversa: Es ist aus der Erfahrung bekannt, daß 20 Menschen 15 Tage an einer gewissen Arbeit zubringen; es ist die Frage: wie lange 6 Menschen daran arbeiten?

Ein Aufsatz nach der Kettenregel wird kein eigentlicher Kettensatz seyn, weil die Frage nur durch ein einziges Verhältniß bestimmet wird; (§. 12) sezt man nun

? Tage ——— 6 Menschen
20 Menschen ——— 15 Tage

so muß man die Glieder 6 und 20 verwechseln um das richtige Facit zu haben; aber dies hat man bei einem richtigen Reesischen Satze nicht nöthig. Denn weil die Tage und die Menschen in beiden Fällen ein und eben dieselbe Arbeit bestimmen, die Größe der Arbeit aber nicht angegeben, welches auch gänzlich unnöthig, so ist die Zahl der Arbeit die Einheit; denn sie macht in beiden Fällen ein für sich bestehendes Ganzes aus. Der Reesische Aufsatz wäre also

? Tage

? Tage } — 1 Arbeit
6 Menschen }

1 Arbeit — { 15 Tage
{ 20 Menschen

worin die Zahlen schon, ohne verwechselt zu werden ihre Ordnung haben. Wenn man also jenen Kettenförmigen Aufsatz für einen eigentlichen Kettensatz annehmen könnte, so ist dennoch ein großer Unterschied da: das Verwechseln der Glieder.

§. 14.

18 Arbeiter werden mit 5 Ackerfeld in 3 Tagen fertig: nun werden uns 9 Arbeiter und 7 Ackerfeld gegeben; man soll untersuchen, wie viel sie Zeit zu dieser Arbeit nöthig haben. — Dies ist ein Beispiel von denjenigen, die sich Regula-Quinque-Inversa tituliren. Wir wollen nun sehen, ob die Kettenregel dabei besser zurechte kommt, als beim vorigen: aber ich zweifle daran. Fange ich an:

? Tage ——— 9 Arbeiter
18 Arbeiter —— 3 Tage

zu setzen, so ist der Satz aus und die Ackerfelder sind noch zurückgeblieben. Zum Facit 6 Tage würde man vorher die Arbeiter verwechseln müssen. Wie sezt man nun weiter? — Etwa

? Tage —— 7 Ackerfelder
5 —— 6 Tage ?

Es ist wahr, die Ausrechnung dieses Satzes giebt das richtige Facit, $8\frac{2}{5}$ Tage: aber der Satz widerspricht sich.

 Die

Die Aufgabe sagt: die 5 Ackerfelder werden in 3 Tagen fertig und hier im Satze wird gesagt, daß sie in 6 Tagen fertig werden.

Nach der Reesischen Methode steht dies Exempel aber richtig, ohne zu verwechseln in einem Satze so:

? Tage 9 Arbeiter	——	7 Ackerfeld
5 Ackerfeld	——	3 Tage 18 Arbeiter

Facit $8\frac{2}{5}$ Tage.

Also erstrecket sich die Kettenregel auch nicht auf diesen Fall; Reesens Regel ist aber allgemein brauchbar.

§. 15.

Ich könnte noch mehrere, auch verwickeltere Vorfälle anführen, die engen Grenzen des Gebiets der Kettenregel zu beweisen: aber die Grenzen, die ich meiner Abhandlung über diesen Gegenstand vorzeichnen muß, verbieten es mir. Alle die angeführten Vorfälle, so wie jeder andere, den meine Leser versuchen mögen, werden uns von der Wahrheit überführen. Das Gebiet der Kettenregel erstrecke sich nur auf die Vorfälle, worin immer Eine Größe eine einzige andere bestimmet, und weiter nicht. Reesens Regel aber dehnt sich auf alle Vorfälle aus, die sich auf bloße geometrische Proportionen gründen.

Weil

Weil es Fälle geben kann, worin einige einzelne Größen wiederum einige einzelne Größen und zugleich zwei oder mehrere Größen, eine andere Größe bestimmen, so können auch Fälle vorkommen, worin man beide Regeln brauchet, wenn man eigentlich will. Das folgende Exempel ist ein solcher Fall, den ich zur beliebigen Untersuchung überlasse. Man weiß, daß in einem Haushalte 12 Personen mit 60 Thlr. in Pistolen für Brodt das Jahr auskommen können, wenn der Scheffel Rocken 1 Thlr. 10 ggr. in Pistolen kostet; Hieraus will man berechnen, wieviel hiesiger Kassenmünze 8 Personen zu unterhalten kosten, wenn der Himte allhier 18 ggr. kostet? Facit $30\frac{6}{11}$ Thaler. — Auch das §. 8. aus Büsch Mathematik angeführte Beispiel ist ein solcher Fall.

§. 16.

Bisher habe ich meine Untersuchung größtentheils mechanisch geführt. Einige meiner Leser werden aber, so wie ich es damals war, damit nicht zufrieden seyn. Ich will nun meinen Gegenstand von einer andern Seite, mehr theoretisch betrachten, und dann werde ich auch im Stande seyn, die in den Proportionen liegende allgemeine theoretische Kennzeichen über den Unterschied unserer beiden um den Vorzug streitenden Methoden, darzulegen.

Hier möchte ich's wünschen, die Sprache der Algebra reden zu dürfen, um mich kurz ausdrücken zu können: aber ich darf's nicht.

§. 17.

Alle Schriftsteller sind darüber einig, daß die Kettenregel eine vielfache Regeldetri sey; und dies ist schon genug für mich. Mit denjenigen die etwa sagen, daß die Vorfälle die ich bis jezt von der Kettenregel abgesondert hätte, sich auch durch eine mehrmalige Regeldetri entwickeln ließen, denke ich auch noch fertig zu werden.

Ich werde zu meinen Beweisen, die ich nun doch einmal nicht allgemein machen darf, die Beyspiele aus dem 11 §. nehmen. Das erste würde nach einer vielfachen Regeldetri berechnet, oder welches einerlei ist, durch Proportionen aufgelöset, so aussehen:

100 ℔. : 840 ℔. = 40 Thlr. Han. K. : a Thlr. Han. K.

Ich setze für das Facit dieses Satzes oder 4ten Gliedes der Proportion den Buchstaben a, aber man fürchte nichts, es wird dadurch noch nicht Algebra. — Man denke sich unter a so wie unter den folgenden b und c das Zeichen einer Zahl, die sich durchs würkliche Rechnen leicht bestimmen läßt. — Durch diese Proportion wäre also zuerst der Werth der 840 Pfund in Hannöverisch Kourant Thlr. bestimmt: und a bezeichnet diesen Werth. Will man diesen Werth (a) in Hamb. Banko bestimmen, so ist

130 Thl. Han. K. : a Thl. Han. K. = 100 Thl. Hb. Bk. : b Thl. Hb. Bk.

b bezeichnet den Werth der 840 Pfund in Hamb. Bko. man will ihn aber in Preußisch Kourant Thlr. wissen, und diesen erhält man, wenn man sezt:

100 Thl.

100 Thl. Hb. Bko. : b Thl. Hb. Bko. = 152 Thl. Pr. K. : c Thl. Pr. K.
c bezeichnet den Werth der 840 Pfund in Preußischen Kour. Thalern, und weil weiter nicht die Frage ist, so muß das Facit würklich berechnet $392\frac{8}{13}$ Thlr. Preuß. Kourant seyn.

Man setze nun diese so entstandene Proportionen untereinander

100 Pfund : 840 Pfund = 40 Thl. Han. K. : a Thl. Han. K.
130 Thl. Han. K. : a Thl. Han. K. = 100 Thl. Hb. Bk. : b Thl. Hb. Bk.
100 Thl. Hb. Bk. : b Thl. Hb. Bk. = 152 Thl. Pr. K. : c Thl. Pr. K.

und betrachte nun aufmerksam die Ordnung in welcher die Verhältnisse und Glieder stehen. Man wird finden:

1) daß das zweite Verhältniß der vorhergehenden Proportion immer mit dem ersten Verhältniß der nachfolgenden Proportion gleichartig ist.

2) daß allezeit das vierte Glied der vorhergehenden Proportion das zweite Glied der nachfolgenden wird.

Man nehme ein Beispiel von noch so vielen Verhältnissen, man wird immer diese Eigenschaften herausbringen. Dies Beispiel ist aber von der Art, daß immer eine Größe eine einzige andere bestimmet, also von derjenigen, die ich für die Kettenregel besonders ausgesondert habe. Wenn nun die Beispiele von der andern Art eben diese Eigenschaften an sich haben, so gebe ich's zu, das Kettenregel und Reesische Regel einerlei sind, sonst aber nicht, — und das wollen wir sehen.

§. 18.

§. 18.

Wir wollen nun das zweite Exempel (§. 11.) nach den Proportionen zergliedern. — Zuerst muß man die Zinsen der 4000 Thlr. in einem Jahre nach dem Verhältnisse der 4 Procent berechnen. Nemlich 100 Thl. Kap. : 4000 Thl. Kap. = 4 Thl. Z. : a Thl. Z. Der Buchstabe a bezeichnet hier den Werth der jährlichen Zinsen von 4000 Thlr. es sollen aber die sechsjährigen Zinsen berechnet werden und daher ist

1 Jahr : 6 Jahr = a Thlr. Zins. b Thlr. Zins.

worin b die 6 jährigen Zins. von 4000 Thlr. bezeichnet.

Nun setze man diese Proportionen, so wie die vorigen untereinander, und betrachte sie genau; was findet man dann? Nicht wahr Folgendes:

1) daß die in allen Proportionen das zweite Verhältniß gleichartig ist, und
2) daß immer das vierte Glied der vorhergehenden Proportion das dritte Glied der nachfolgenden wird.

Man mag ein Beispiel dieser Art wählen, daß noch so viel Proportionen geben würde, man wird immer diese zwo Eigenschaften bei allen antreffen.

Sind aber diese Eigenschaften von denjenigen der ersten Art (§. 17.) nicht gänzlich verschieden? und was folgt daraus am nächsten, als daß die Regel, die auf die erste Art angewandt wird, nicht auf die zweite Art angewandt werden kann. Reesens Regel ist aber allgemein, weil sie blos auf die Bestimmung der Größen

sieht,

sieht, ohne die Anzahl der sich bestimmenden Größen und die Art der Bestimmung in Betracht zu ziehen.

§. 19.

Beispiele welche aus Ketten- und Reesische Regel zusammengesetzt bestehen sollen, (§. 15.) bei solchen müssen auch die hier gezeigten Eigenschaften beider Regeln zugleich statt finden, und das geschieht auch. Das §. 15. bemerkte Beispiel, sieht, in Proportionen zerlegt so aus:

Reesische Regel { 12 Per. : 8 Per. = 60 Thlr. G. : a Thlr. G.
44 ggr. : 18 ggr. = a Thlr. G. : b Thlr. G.

Kettenregel { 1 Schef. : 2 Himt. = b Thlr. G. : c Thlr. G.
15 Thl. G. : c Thl. G. = 14 Thl. Kg. : d Thl. Kg.

und dies bestätiget noch mehr die Wahrheit, daß die Kettenregel sich nicht weiter erstreckt, als auf die Vorfälle, worin immer Eine Größe eine einzige andere bestimmet.

§. 20.

Noch eine Anmerkung. Vielleicht sind einige meiner Leser der Meinung, daß ich hätte §. 17. setzen müssen:

100 Pfund : 40 Thl. Han. K. = 840 Pfund : a Thl. Han. K.
130 Thl. Han. K : 100 Thl. Hb. Bk. = a Thl. Han. K. : b Thl. Hb. Bk.
100 Thl. Hb. Bk. : 152 Thl. Pr. K. = b Thl. Hb. Bk. : c Thl. Pr. K.

wo nemlich die beiden mittlern Glieder verwechselt sind. Ich habe Gründe genug, wenn ich sage 1) daß man

die Kettenregel nach den Namen der Zahlen ordnet, und 2) die gesetzten Proportionen der Natur der Verhältnisse gemäß sind, indem sich nur gleichartige Dinge zu einander verhalten können. Aendert man diese wahren Proportionen durch jene Verwechselung, so darf man auf die Namen, oder besser auf die Arten der Einheiten der Zahlen nicht zurücksehen, sondern alsdenn verhalten sich die Zahlen der Proportionen blos als Zahlen. Und nun gesetzt, man verwechselt die mittlern Glieder, so müssen dieselben Glieder in den Proportionen der andern Art (§. 18, 17, 11.) auch verwechselt werden:

100 Thl. Kap. : 4 Thl. Zinf. = 400 Thl. Kap. : a Thl. Zinf.
1 Jahr : a Thl. Zinf. = 3 Jahre : b Thl. Zinf.

und was gewinnt man dabei? — Nichts, als es kommen für jede besondere Klasse von Vorfällen besondere Eigenschaften, die gar nicht übereinstimmen.

Habe ich nun recht wenn ich sage: die Kettenregel ist von der Reesischen Regel unterschieden? — wenn ich die Grenze der erstern nicht weiter als bis auf die Vorfälle des Lebens worinn eine Größe immer Eine andere bestimmet, ausdehne, der Reesischen Regel aber eine allgemeine Herrschaft einräume? — Ich biete jedem brüderlich die Hand, der mich eines andern belehren will und kann; diese Belehrungen müßten aber gründlich und mit Beweisen verknüpft seyn, sonst fällt das verdienstliche derselben von selbst weg.

P.



III. Ueber Raphael Levi's Rechnungs-Methode.

§. 1.

Seit Rees verdienet wol keine Bekanntmachung neuer Rechnungsmethoden mehrere Aufmerksamkeit des praktischen Rechners als die Raphael Levische. Diese erleichtert und erweitert die gemeine Rechnung um ein großes, indem sie Lücken ausfüllt, welche die Kettenregel und Reesische Regel noch immer übrig ließen: durch sie ist der Wunsch mancher Rechner erfüllet.

§. 2.

Der Zusammenfluß von Regeln, der diese Rechnungsmethode ausmacht, ist die Frucht des Fleißes, die den schon verewigten Erfinder kurz vor seinem Ende erfreute. *) Der Jude Meyer Aaron hat sie öffentlich bekannt gemacht, aber in einer Schrift **) worin dem Leser

*) In einem der folgenden Stücke, sollen einige Nachrichten von seinem Leben und Schriften folgen. Eine Biographie dieses Mannes ist um so merkwürdiger, weil er ein Schüler des großen Leibnitz gewesen, und von diesem Umstande alle Lebensbeschreiber desselben schweigen.

**) Raphael Levi's Rechnungsmethode, herausgegeben von Meyer Aaron, mit einer Abhandlung über die vier Species des

Leser zwar die Aufsätze von einer Menge Exempeln vorgestellet sind, aber — welches selbst dem blos praktischen Rechner nicht fehlen darf, — ohne genugsame und sichere **Regeln**, und ohne **Beweise**.

§. 3.

Nicht alles neue ist besser wie das Alte:
Die Bestätigung dieses Satzes findet man sehr oft, bei einer genauen Untersuchung des Neuen; nur bemerket man ihn nicht so viel und leicht, theils aus Neigung fürs Neue, theils aus Mangel einer überlegten Vergleichung. Auch unter der Raphaelschen Rechnungsmethode finden sich Sätze die nichts als das Neue für sich haben, um sich zu empfehlen, und von deren Anwendung man nie einige Allgemeinheit hoffen kann; Sätze die ungleich weitläuftiger und schwerer zu entwickeln sind, als nach den bekannten Arten. — Gemeiniglich findet eine neue Rechnungsmethode, so wie alle neue Dinge in der Welt eine kleine und große Menge Liebhaber, und diese sagen alle: sie ist schön. Insbesondere findet dieses statt, wenn sich die Erfindung von einem Manne herschreibt, von dessen Geschicklichkeit in diesem Fache man schon mehrere Erfahrungen hat. Nichts ist auch natürlicher als dies: von einem geschickten Manne erwartet man immer was Gutes, oft das Beste

des Rechnens mit Brüchen. Hannover, gedrukt bey H. M. Pockwitz, 1783. Das Buch selbst findet man unten beurtheilet.

Beste. Oft entspricht die Erfindung der Erwartung: aber dennoch selten so ganz, daß nicht etwas Stückwerk dabei wäre. Es würde aber unbillig seyn, die Erfindung deswegen zu tadeln, sondern danken müssen wir dem Erfinder, daß er uns doch wenigstens dem Ziele aller Wünsche in allen unsern Neigungen und Fähigkeiten der Vollkommenheit näher brachte. Aber das noch Unvollkommene oder das eingebildete Bessere anzeigen, würde das auch unbillig seyn? — Gewiß nicht, wenn wir trachten uns zu vervollkommnen.

§. 4.

Dies bestimmt den Zweck dieser Abhandlung. Ich habe mir vorgesetzet die Regeln und Beweise, das Gute und Schlechte der Raphaelschen Rechnungsmethode zu zeigen. Man wird es voraussehen können, daß ich mich nach nichts weniger richten kann, als nach dem Buche, wovon ich §. 2. geredet habe; sondern ich werde ganz nach meinem eigenen Plane arbeiten. Zuerst will ich das **Auszeichnende** dieser Rechnungsmethode, in den verschiedenen einzelnen Rechnungen durch sichere Regeln festsetzen und diese **beweisen**. Die Beweise will ich so deutlich als möglich auch für den gemeinen Rechner einrichten, bei welchen ich Kenntniße der Proportionen voraussetzen darf. Ich werde eben dieselben Beweise für den höhern Rechner algebraisch darstellen: denn solchem kann ich in 5 Reihen mehr sagen, als dem andern auf 2 Seiten. Dadurch werde ich aber

dop-

doppelt beweisen? — Nun denn, der gemeine Rechner überspringt den algebraischen Beweis, und der höhere Rechner keinen. Dann will ich es versuchen, **das Verdienstliche dieser Methode aufzusuchen:** nemlich dieselbe nach ihren Aufsätzen und Entwickelungen, mit Hinsicht auf Leichtigkeit und Kürze untersuchen, und mit den bekannten Methoden vergleichen. Nichts ist wol nützlicher als eine solche Kritik.

Die Regeln und deren Beweise.

§. 5.

Raphael Levi's Methode unterscheidet sich von den bekannten Arten in Aufgaben

1) wo eine oder mehrere Zahlen bestimmet werden.
2) wo die Größe der Ausdehnung eines Dinges sich mit einer andern Sache gegenseitig bestimmt.
3) in Aufgaben der Inversa, oder wo die Zahlen in einem wiederkehrlichen Verhältnisse stehen.
4) in der Rabatt-Rechnung.
5) in der Alligations-Rechnung.
6) in der Gesellschafts-Rechnung, und
7) in Aufgaben von vermischten Größen.

Jede von diesen Rechnungen hat ihre auszeichnende Regeln; diese werden aber oft nach den Umständen der Aufgaben mit einander verbunden, und sind daher zum Aufsatze und Entwickelung einer Aufgabe zwei oder drei Regeln nöthig. Sie lassen sich aber auch verbinden, und zu einer umschaffen.

§. 6.

§. 6.

Die Regeln selbst lassen sich in **Aufsatzregeln** und **Entwickelungsregeln** eintheilen. Jene machen größtentheils das Wesentliche der Raphaelschen Methode aus, und diese kommen theils mit den bekannten Methoden überein oder sind davon unterschieden. Gewissermaaßen verweben sie sich auch beide in einigen Fällen. Da, wo die Entwickelungsregel nichts besonders hat, lasse ich sie weg.

§. 7.

Zuerst also von der Regel zu den Aufgaben **wo Eine oder mehrere Zahlen durch zwei oder mehrere Zahlen bestimmet werden.** *)

Unter den Aufgaben dieser Art, sind insbesondere die auffallend wo

1) **Kapital, Procent** und **Zeit.**
2) **Arbeiter,** die **Zeit** und die **Arbeit.**
3) **Personen** oder auch **Thiere** die **Zeit** und ein **verzehrtes Etwas.**
4) **Dinge** oder **Körper** und ihre **Länge Breite** und **Dicke**

in solcher Verbindung stehen, daß sie sich **wechselseitig bestimmen.**

Den=

*) Ich beziehe mich dieserhalb auf die vorige Abhandlung §. 8. wo ich gesagt habe was namentlich für Rechnungen hieher gehören.

Dennoch aber haben alle diese Aufgaben Ein vielleicht noch nicht bekanntes Gesetz: nemlich die **Zahlen einer Aufgabe, die gemeinschaftlich ein oder mehrere andere Zahlen bestimmen, haben die Eigenschaft: daß sich von der Einheit der einen Zahl die andere Zahl so sagen läßt, wie sich die beiden Ganzen von einander sagen lassen.** — Ich werde mich bald weiter über dieses Gesetz erklären und setze nur hinzu, daß dieses der Grund der Raphaelschen Regel zum Aufsatze dieser Art Aufgaben ist. Ob Raphael Levi es würklich damals, da er die Regel erfand, zum Grunde derselben legte, davon ist kein Beweis da: aber wenigstens habe ich bei der Untersuchung seiner Regel gefunden, daß sie sich darauf gründet.

§. 8.

Kapital und Zeit bestimmen die Zinsen oder diese hinwiederum jene. Es läßt sich sagen: daß die Einheit des Kapitals die ganze Zeit auf Zinsen stehe, oder daß in der Einheit der Zeit das ganze Kapital auf Zinsen stehe. Z. B. bringen 200 Thlr. in 4 Jahren 40 Thlr. Zinsen auf, so ist es gleich wahr daß hier 1 Thlr. von den 200 Thlr. 4 Jahre lang auf Zinsen stehe, als daß die Summe der 200 Thlr. 1 Jahr von den 4 Jahren auf Zinsen stehen, so wahr als 200 Thlr. 4 Jahre lang, und 4 Jahre lang 200 Thlr. Kapital ausstehen.

Arbei-

Arbeiter und Zeit bestimmen die Arbeit und umgekehrt. Man kann sagen: daß 1 Arbeiter von allen die ganze Zeit arbeite, als auch: daß alle Arbeiter die Einheit der Zeit über gearbeitet haben. Denn z. B. 50 Schneider machen in 4 Wochen, wenn sie jede Woche 6 Tage, jeden Tag aber 10 Stunden arbeiten, 500 Mondirungen fertig, so wird die Zahl der Mondirungen durch die 50 Schneider und die Zeit, nemlich der 4 Wochen mal 6 Tage mal 10 Stunden, bestimmt. Ein Schneider arbeitet also 4 Wochen lang, jede Woche 6 Tage und jeden Tag 10 Stunden; und auch 1 Woche lang, jede von 6 Tagen, und in diesen 10 Stunden arbeiten alle 50 Schneider.

Personen oder Thiere die in einer gewissen Zeit Etwas verzehren, bestimmen dieses Etwas, oder dieses bestimmt jene. Eine Person verzehret die ganze Zeit über, und während der Einheit der Zeit zehren alle Personen, z. B. 12 Personen verzehren in 4 Monath 8 Malter Rocken, so läßt sich sagen: daß 1 Person alle 4 Monate und daß auch 1 Monat lang 12 Personen zehren.

Alle Dinge in der Welt haben ihre Länge, Breite, Dicke oder Tiefe, so bald man auf die Ausdehnung derselben sieht; folglich wird diese durch jene Abmessungen bestimmet. Man kann aber immer sagen: daß eine Einheit oder ein Theil von der ganzen Länge so breit wie die ganze Breite, und so dick oder tief, wie die ganze Dicke oder Tiefe; ferner, daß ein Theil, oder die Einheit der Breite so lang wie die ganze Länge und so

so dick wie die ganze Dicke; ferner auch, daß ein Theil oder Einheit der Dicke oder Tiefe, so lang wie die ganze Länge und so breit wie die ganze Breite sey. Denn ist eine Mauer 12 Fuß lang, 4 Fuß hoch und 2 Fuß dick, so ist auch 1 Fuß der Länge 4 Fuß hoch und 2 Fuß dick, oder, 1 Fuß der Höhe ist 12 Fuß lang und 2 Fuß dick, oder 1 Fuß der Dicke ist 12 Fuß lang und 4 Fuß hoch. Ein Morgen Land, der z. B. 120 Quadratruthen hat, kann, wenn keine besondere Länge oder Breite festgesetzt ist, bald zu 1 Ruthen lang und 120 Ruthen breit und bald zu 120 Ruthen lang und 1 Ruthen breit, angenommen werden und beides ist arithmetisch und geometrisch wahr.

§. 9.

Man sieht es also deutlich, daß die (§. 7.) gesagte Eigenschaft aller dieser Art Aufgaben gemein ist. Hierauf ist nun Raphael Levi's Aufsatz gegründet, und ließe sich die Regel davon hiedurch mechanisch beweisen. Seine **Regel** ist folgende: **Wenn ein gewisses Ganze ein Glied eines Kettensatzes ist und von der Einheit desselben sich ein anderes Ganzes sagen läßt, so werden jene Einheit und dieses andere Ganze die auf das erste Ganze folgende Glieder der Kette.**

Diese kurze Regel will ich erst mit ein paar Exempeln erläutern, und dann beweisen. — Wenn 100 Thlr. 4 Thlr. Zinse in 1 Jahr aufbringen, wie viel Zinse

wer-

werden 4000 Thlr. in 6 Jahren geben? Die Fragezahl dieser Aufgabe ist natürlicherweise 4000 Thlr. nemlich indem ich frage: wie viel Thlr. Zinse geben 4000 Thlr. sie kann aber auch 6 Jahre seyn, wenn ich frage: wie viel Thlr. Zinse ich in 6 Jahren bekomme? Sie mag nun seyn welche man will, so ist sie doch in beiden Fällen ein Ganzes, eine Summe. Ist sie 4000 Thlr. so kann man sagen, daß die Einheit von diesem Ganzen, oder 1 Thlr. von den 4000 Thlr. 6 Jahre auf Zinsen stehe, so wie die ganzen 4000 Thlr. so lange darauf stehen. In diesem Falle würde also 1 Thlr. von den 4000 Thlr. und 6 Jahre die zwei folgenden, gegen einander über stehenden Glieder der Kette und der Anfang des Satzes so seyn:

A. 1. ? Thlr. Zinse —— —— 4000 Thl. Kap.
1 Thlr. (von den 4000 Thlr.) 6 Jahre

Ist die Fragezahl 6 Jahre, so läßt sich sagen, daß 1 Jahr von den 6 Jahren 4000 Thlr. auf Zinsen stehen, d. i. auch in diesem, dem ersten umgekehrten Falle, läßt sich die Einheit vom Ganzen sagen, und sind also 1 Jahr und 4000 Thlr. die zwei folgenden Glieder der Kette; nemlich so:

B. 1. ? Thlr. Zinse —— —— 6 Jahren
1 Jahr (von den 6) —— 4000 Thlr. Kap.

Im ersten Falle folget zur Vollendung der Kette 1 Jahr, in welchem 100 Thlr. Zinse geben. Dies 1 Jahr ist wiederum ein Ganzes, wovon sich die Einheit eines andern Ganzen sagen läßt; nemlich dies 1 Jahr lang

 steht

so dick wie die ganze Dicke; ferner auch, daß ein Theil oder Einheit der Dicke oder Tiefe, so lang wie die ganze Länge und so breit wie die ganze Breite sey. Denn ist eine Mauer 12 Fuß lang, 4 Fuß hoch und 2 Fuß dick, so ist auch 1 Fuß der Länge 4 Fuß hoch und 2 Fuß dick, oder, 1 Fuß der Höhe ist 12 Fuß lang und 2 Fuß dick, oder 1 Fuß der Dicke ist 12 Fuß lang und 4 Fuß hoch. Ein Morgen Land, der z. B. 120 Quadratruthen hat, kann, wenn keine besondere Länge oder Breite festgesetzt ist, bald zu 1 Ruthen lang und 120 Ruthen breit und bald zu 120 Ruthen lang und 1 Ruthen breit, angenommen werden und beides ist arithmetisch und geometrisch wahr.

§. 9.

Man sieht es also deutlich, daß die (§. 7.) gesagte Eigenschaft aller dieser Art Aufgaben gemein ist. Hierauf ist nun Raphael Levi's Aufsatz gegründet, und ließe sich die Regel davon hiedurch mechanisch beweisen. Seine **Regel** ist folgende: **Wenn ein gewisses Ganze ein Glied eines Kettensatzes ist und von der Einheit desselben sich ein anderes Ganzes sagen läßt, so werden jene Einheit und dieses andere Ganze die auf das erste Ganze folgende Glieder der Kette.**

Diese kurze Regel will ich erst mit ein paar Exempeln erläutern, und dann beweisen. — Wenn 100 Thlr. 4 Thlr. Zinse in 1 Jahr aufbringen, wie viel Zinse wer-

werden 4000 Thlr. in 6 Jahren geben? Die Fragezahl dieser Aufgabe ist natürlicherweise 4000 Thlr. nemlich indem ich frage: wie viel Thlr. Zinse geben 4000 Thlr. sie kann aber auch 6 Jahre seyn, wenn ich frage: wie viel Thlr. Zinse ich in 6 Jahren bekomme? Sie mag nun seyn welche man will, so ist sie doch in beiden Fällen ein Ganzes, eine Summe. Ist sie 4000 Thlr. so kann man sagen, daß die Einheit von diesem Ganzen, oder 1 Thlr. von den 4000 Thlr. 6 Jahre auf Zinsen stehe, so wie die ganzen 4000 Thlr. so lange darauf stehen. In diesem Falle würde also 1 Thlr. von den 4000 Thlr. und 6 Jahre die zwei folgenden, gegen einander über stehenden Glieder der Kette und der Anfang des Satzes so seyn:

A. 1. ? Thlr. Zinse —— —— 4000 Thl. Kap.
1 Thlr. (von den 4000 Thlr.) 6 Jahre

Ist die Fragezahl 6 Jahre, so läßt sich sagen, daß 1 Jahr von den 6 Jahren 4000 Thlr. auf Zinsen stehen, d. i. auch in diesem, dem ersten umgekehrten Falle, läßt sich die Einheit vom Ganzen sagen, und sind also 1 Jahr und 4000 Thlr. die zwei folgenden Glieder der Kette; nemlich so:

B. 1. ? Thlr. Zinse —— —— 6 Jahren
1 Jahr (von den 6) —— 4000 Thlr. Kap.

Im ersten Falle folget zur Vollendung der Kette 1 Jahr, in welchem 100 Thlr. Zinse geben. Dies 1 Jahr ist wiederum ein Ganzes, wovon sich die Einheit eines andern Ganzen sagen läßt; nemlich dies 1 Jahr lang

 steht

steht 1 Thlr. von den 100 Thlr. Kapital, und daher sind 1 Jahr und 1 Thlr. von 100, die 2 folgenden Kettenglieder im Aufsatz für den ersten Fall.

? Thlr. Zinse —— 4000 Thlr. Kap.
A. 2. 1 Thlr. (von den 4000) 6 Jahre
1 Jahr —— —— 1 Thlr. (von den 100)

Auf diese Einheit des Ganzen der 100 Thlr. müssen im Satze diese 100 Thlr. selbst folgen, und das gegenüberstehende Glied der Kette 4 Thlr. Zinse seyn, weil 100 Thlr. 4 Thlr. Zinse geben. Der völlige Kettensatz dieser Aufgabe, für den Fall, daß 4000 Thlr. die Frage ist, würde also folgender seyn, welcher alles was zu einem Kettensatze gehöret, vollkommen hat.

? Thlr. Zinse —— —— 4000 Thlr. Kap.
A. 3. 1 Thlr. (von 4000) —— 6 Jahre
1 Jahr —— —— 1 Thlr. (von 100)
100 Thlr. —— —— 4 Thlr. Zinse

Für den Fall, daß die 6 Jahre die Fragezahl sey, müßte zu Vollendung der Kette (in B. 1.) 100 Thlr. Kapital folgen. Diese 100 Thlr. sind ein Ganzes, wovon sich die Einheit eines andern Ganzen, nemlich der Anzahl Jahre sagen läßt. Nun ist zwar hier dies andere Ganze die Einheit selbst, aber dies stöhrt den Begrif des Ganzen nicht, es ist nur die Einheit dem Ganzen gleich. Die zwei folgenden Glieder des Satzes waren also 100 Thlr. und 1 Jahr und der Satz selbst:

? Thlr.

? Thlr. Zinse ——————— 6 Jahre
B. 2. 1 Jahr (von 6) —— —— 4000 Thlr. Kap.
100 Thlr. Kap. —— —— 1 Jahr

Man wird es nun rathen können, daß die beiden lezten Glieder der Kette 1 Jahr und 4 Thlr. Zinsen seyn werden, und sie müssen es auch seyn, weil es wahr ist, daß, wenn 100 Thlr. Kapital 1 Jahr ausstehen, und diese 100 Thlr. 4 Thlr. Zinse einbringen, in 1 Jahr 4 Thlr. Zinse aufgebracht werden. Der ganze vollkommene Kettensaz wäre also:

? Thlr. Zinse ————— 6 Jahre
B. 3. 1 Jahr (von 6) —— 4000 Thlr. Kap.
100 Thlr. —— —— 1 Jahr (als Einheit)
1 Jahr (als Ganzes) — 4 Thlr. Zinse

§. 11.

Das folgende Exempel ist ein wenig verwickelter. 6 Schneider machten in 4 Wochen, da sie jede Woche 6 Tage und jeden Tag 12 Stunden arbeiteten, 150 Commisröcke und bekamen für jeden Rock 8 ggr. Zu einer andern Zeit hat man 10 Schneider, welche aber nur 3 Wochen und in dieser nur 4 Tage, jeden Tag aber 14 Stunden arbeiten können; wie viel werden diese in der Zeit verdienen können, wenn man, um daß sie fleißiger seyn sollen, für jeden Rock 2 ggr. mehr giebt.

Der Aufsatz von diesem Exempel ist folgender:

 ? Thlr.

? Thlr. — — 10 Schneider
1 (von 10) — — 3 Wochen
1 — — — 4 Tage
1 — — — 15 Stunden
12 — — — 1 Tag
6 — — — 1 Woche
4 — — — 1 Schneider (von den 6)
6 — — — 150 Röcke
1 — — — 10 ggr.

Die Frage ist nemlich: wie viel Thlr. 10 Schneider verdienen? Weil der Verdienst aber nicht allein aus der Anzahl Arbeiter, sondern zugleich aus der Arbeitszeit bestimmet werden muß, so muß also diese mit ihren Bestimmungen folgen. Von der Einheit der ganzen Anzahl Schneider, nemlich von 1 Schneider läßt sich sagen, daß er 3 Wochen ꝛc. arbeite, so wie dies von der ganzen Zahl der Arbeiter gesagt wird, und darum folgt im Satze: 1 Schneider (von den 10 Schneidern) arbeitet 3 Wochen. Die Bedingungen der Aufgabe weisen leicht die folgenden Glieder der Kette ihren Ort an. Was die Bestimmungen der Zeit anbetrift, so machen diese zusammengenommen nur eine einzige Bestimmung im Satze aus. Nemlich: 3 $\times$ 4 $\times$ 15 Stunden ist die Zeit, worin die 10 Arbeiter ihre Arbeit verfertigen und das Ihrige verdienen; daher kann man auch bei diesen Gliedern der Kette nicht so wie bei den ersten von der Einheit des einen Ganzen, das andere Ganze sagen. Man kann sagen: daß 1 Woche 4 Tage gearbeitet

beitet wird; man kann aber auch sagen, daß man jeden Tag von den 4, 3 Wochen lang arbeitet, nur ist lezteres nicht so gebräuchlich.

Daraus läßt sich sagen, daß 4 Wochen 1 Schneider von den 6 arbeitet, und folglich sind 4 Wochen — 1 Schneider zwey Glieder der Kette. — Am Ende des Satzes hätte eigentlich gesetzt werden müssen:

6 Schneider	——	150 Röcke	
1 ——	——	——	8 ggr.
8 ——	——	——	10 ggr.

weil aber sich die zweimal 8 ggr. einander aufheben, und der Begriff auch richtig ist, daß, nachdem für jeden Rock 2 ggr. mehr gegeben, 1 Rock 10 ggr. kosten würde; so war dies lezte zu setzen nöthig.

§. 12.

Der Beweis für diese Regel entstehet aus ein paar Lehrsätzen der Proportionen, und ich werde mich bemühen, jedem Leser deutlich zu seyn; zuerst aber werde ich einen allgemeinen algebraischen Beweis geben, und dann den für gemeine Rechner. Der leztere wird aber den erstern mehr bestätigen und erörtern. Folgendes schicke ich beiden vorau.

1) in einem Produkte verhält sich die Einheit zu dem einen Faktor, wie das Produkt der übrigen zum ganzen Produkt. In einem Produkte von 2 Faktoren verhält sich die Einheit zum einen, wie der andere zum ganzen Produkte. z. B. Es sind 3 × 4 × 5 die Faktoren von 60; daher verhält sich 1 zu 3 wie 4 × 5 oder das

das Produkt der übrigen Faktoren zum ganzen Produkt 60, d. i. 1 : 3 = 4 ⨯ 5 : 60 u. s. w. man mag eine Verwechselung der Faktoren vornehmen welche man will.

2) Die Dinge in dieser Art Aufgaben verhalten sich so zu einander, wie sich Ursachen, Zeiten und Würkungen gegeneinander verhalten. Das Verhältniß dieser drei Dinge ist aber folgendes: Das Produkt der Ursachen und Zeiten stehet mit der Würkung in Verhältniß: nie darf eins von diesen Dingen fehlen, wenn nicht das Verhältniß soll aufgehoben werden. Man sieht es, daß eben die beiden Größen, die zusammen die dritte bestimmen, sich als das Produkt zu dieser dritten verhalten. Jede von unsern Aufgaben ist mit ihrer Antwort eine geometrische Proportion, welche aus den zwei gleichen Verhältnissen bestehet, so das Produkt der Ursachen und Zeiten die einerlei Würkung bestimmen, mit dieser ausmacht. Zum Beispiel das vorige Exempel von den Zinsen: Darin sind Kapitale und Jahre die Ursachen und Zeiten; die Zinsen davon die Würkung. 100 Thlr. ⨯ 1 Jahr verhält sich also zu 4 Thlr. Zinse, und 4000 Thlr. ⨯ 6 Jahre verhält sich zu x (einer noch unbekannten Anzahl Thaler) Zinsen. Die Zahlen dieser beiden Verhältniße machen die geometrische Proportion

$$100 \times 1 : 4 = 4000 \times 6 : x$$

weil in jeder Aufgabe sich das unbekannte Glied des Verhältnisses (x) zu dem schon bekannten Gliede verhalten soll, wie sich die beiden Glieder des andern Verhält-

hältnisses verhalten; denn dadurch wird festgesetzt; daß beide Verhältnisse gleich seyn sollen.

§. 13.

Wenn u die Ursache bedeutet, welche in der Zeit z die Würkung w, und U die Ursache, welche in der Zeit Z die Würkung W hervorbringt, so entstehet die Proportion.

$$uz : w = UZ : W \text{ (nach §. 12. n. 2.)}$$

Die Glieder uz und UZ sind Produkte zweier verschiedenen Faktoren, und würden also (n. 1.) diese Glieder in folgende 2 Proportionen zerleget werden können:

$$1 : u = z : uz$$

$$\text{und } 1 : U = Z : UZ$$

freilich können hierin die Glieder u und z und U und Z verwechselt werden, der Proportion ohnbeschadet.

Nun setze man diese Proportionen für die Produkte in der ersten Proportion, so erhält man

$$(1 : u) \underline{\underline{:}} (z : w) = (1 : U) \underline{\underline{:}} (Z : W)$$

wofür wir aber lieber

$$\frac{1}{u} : \frac{z}{w} = \frac{1}{U} : \frac{Z}{W}$$

setzen wollen, indem man auch jedes Verhältniß als einen Quotienten des nachfolgenden Gliedes in das vorhergehende anzeigen kann.

Dieser Ausdruck führt uns deutlich zu den zusammengesetzten Verhältnissen zurück. Man sieht es, daß das Verhältniß Z : W, aus den Verhältnissen U : 1

w : z

w : z und 1 : u entstehet. Das ist nach Art der Kettenregel zu setzen

(W = a = ?) —— Z
1 —— —— —— U
u —— —— —— 1
z —— —— —— w

Man vergleiche nun diese Buchstaben mit dem Satz des Exempels §. 10. so wird man eine völlige Gleichheit finden, für den Fall, daß die Zeit die Fragezahl ist. Ist das Kapital die Fragezahl, so ist hier obiges Produkt UZ so in Proportion zerlegt: 1 : Z = U : UZ, und alsdenn ist das zu suchende Verhältniß U : W und diese entstehen aus den Verhältnissen

Z : 1
1 : z und
w : u

wodurch der Satz für diesen Fall auch gerechtfertiget wäre.

§. 14.

Wenn 100 Thlr. in 4 Jahren 12 Thlr. Zinse geben, so bringen 4000 Thlr. in 6 Jahren 720 Thlr. Zinsen auf. — Dies Beyspiel will ich zum Grunde legen. Jeder sieht es, daß beiderlei Zinsen, die 12 Thlr. und die 720 Thlr. aus den Kapitalen, wovon sie Zinsen sind, und der Zeit wie lange dies Kapital auf Zinsen genutzt wird, gemeinschaftlich entstehen. Es würden gleichviel Zinsen entstehen, ob man 100 Thlr. 4 Jahre

lang

lang verzinsete, oder 100 ⋊ 4 = 400 Rthlr. 1 Jahr lang, oder auch 1 Thlr. 100 ⋊ 4 = 400 Jahre lang, wenn dabei derselbe Zinsfuß festgesetzt bleibt. Also in allen Fällen bestimmet das Produkt des Kapitals in die Zeit, die Zinsen, oder diese Zahlen stehen in einer geometrischen Verhältniß. Unser Beispiel hat also zwey dergleichen Verhältnisse:

I) 100 ⋊ 4 : 12 und II) 4000 ⋊ 6 : 720.

Weil nun diese Verhältnisse gleichförmig entstehen, so sind sie in Proportion:

A) 100 ⋊ 4 : 12 = 4000 ⋊ 6 : 720.

Jedes der beiden Verhältnisse hat ein Glied das ein Produkt zweier Faktoren ist. Diese Faktoren stehen nach §. 12. n. 1. in einer neuen Proportion:

100 ⋊ 4 = 1 : 100 = 4 : 100 ⋊ 4 oder
auch 1 : 4 = 100 : 100 ⋊ 4 und
4000 ⋊ 6 = 1 : 4000 = 6 : 4000 ⋊ 6 oder
auch 1 : 6 = 4000 : 4000 ⋊ 6.

Das Produktglied jener Proportionen ist das vierte Glied derselben: es müssen sich demnach die 3 ersten Glieder derselben, so zu dem andern Gliede des Verhältnisses, von dessen ersten Gliede die Proportion entstanden, verhalten, wie sich das Produktglied dazu verhält. Es ist also

nach I) 1, (1 : 100) : (4 : 12) oder (1 : 4) : (100 : 12) und nach
II) 2, (1 : 4000) : (6 : 720) oder (1 : 6) : (4000 : 720)

das heißt z. B. die Verhältnisse 1 : 100 und 4 : 12 haben wiederum ein Verhältniß untereinander; die Verhält-

w : z und 1 : u entstehet. Das ist nach Art der Kettenregel zu setzen

$$\begin{array}{cccc} (W = a = ?) & & — & Z \\ 1 & — & — & U \\ u & — & — & 1 \\ z & — & — & w \end{array}$$

Man vergleiche nun diese Buchstaben mit dem Satz des Exempels §. 10. so wird man eine völlige Gleichheit finden, für den Fall, daß die Zeit die Fragezahl ist. Ist das Kapital die Fragezahl, so ist hier obiges Produkt UZ so in Proportion zerlegt: 1 : Z = U : UZ, und alsdenn ist das zu suchende Verhältniß U : W und diese entstehen aus den Verhältnissen

$$\begin{array}{ccc} Z & : & 1 \\ 1 & : & z \text{ und} \\ w & : & u \end{array}$$

wodurch der Satz für diesen Fall auch gerechtfertiget wäre.

§. 14.

Wenn 100 Thlr. in 4 Jahren 12 Thlr. Zinse geben, so bringen 4000 Thlr. in 6 Jahren 720 Thlr. Zinsen auf. — Dies Beyspiel will ich zum Grunde legen. Jeder sieht es, daß beiderlei Zinsen, die 12 Thlr. und die 720 Thlr. aus den Kapitalen, wovon sie Zinsen sind, und der Zeit wie lange dies Kapital auf Zinsen genutzt wird, gemeinschaftlich entstehen. Es würden gleichviel Zinsen entstehen, ob man 100 Thlr. 4 Jahre lang

lang verzinsete, oder 100 × 4 = 400 Rthlr. 1 Jahr lang, oder auch 1 Thlr. 100 × 4 = 400 Jahre lang, wenn dabei derselbe Zinsfuß festgesetzt bleibt. Also in allen Fällen bestimmet das Produkt des Kapitals in die Zeit, die Zinsen, oder diese Zahlen stehen in einer geometrischen Verhältniß. Unser Beispiel hat also zwey dergleichen Verhältnisse:

I) 100 × 4 : 12 und II) 4000 × 6 : 720.

Weil nun diese Verhältnisse gleichförmig entstehen, so sind sie in Proportion:

A) 100 × 4 : 12 = 4000 × 6 : 720.

Jedes der beiden Verhältnisse hat ein Glied das ein Produkt zweier Faktoren ist. Diese Faktoren stehen nach §. 12. n. 1. in einer neuen Proportion:

100 × 4 = 1 : 100 = 4 : 100 × 4 oder
auch 1 : 4 = 100 : 100 × 4 und
4000 × 6 = 1 : 4000 = 6 : 4000 × 6 oder
auch 1 : 6 = 4000 : 4000 × 6.

Das Produktglied jener Proportionen ist das vierte Glied derselben: es müssen sich demnach die 3 ersten Glieder derselben, so zu dem andern Gliede des Verhältnisses, von dessen ersten Gliede die Proportion entstanden, verhalten, wie sich das Produktglied dazu verhält. Es ist also

nach I) 1, (1 : 100) : (4 : 12) oder (1 : 4) : (100 : 12) und nach
II) 2, (1 : 4000) : (6 : 720) oder (1 : 6) : (4000 : 720)

das heißt z. B. die Verhältnisse 1 : 100 und 4 : 12 haben wiederum ein Verhältniß untereinander; die Verhält-

hältnisse 1 : 6 und 4000 : 720 sind wiederum in einem Verhältniß mit einander. Man sieht es hier, daß sich die Einheit zum Kapital verhalte, wenn die Zeit mit der Würkung, und daß die Einheit sich zur Zeit verhalte, wenn das Kapital mit den Zinsen in Verhältniß stehet.

Setzet man nun diese Verhältnisse (1 und 2) in die obige Proportion A, so entstehet

a) $\frac{1}{100} : \frac{4}{12} = \frac{1}{4000} : \frac{6}{720}$ oder

b) $\frac{1}{4} : \frac{100}{12} = \frac{1}{6} : \frac{4000}{720}$,

je nachdem man die Einheit zu dem einen oder dem andern Faktor, d. i. zum Kapital oder der Zeit verhalten läßt. In a verhält sich die Einheit zum Kapitale, in b die Einheit zur Zeit. Uebrigens sind in diesen Proportionen a und b die Verhältnisse als Quotienten bezeichnet, um nicht durch eine andere Bezeichnung undeutlich zu seyn.

§. 15.

Bei dieser Art Exempel können nun 3 Fragen entstehen, neinlich

1) man soll eine unbekannte Würkung zu der bekannten Ursache und Zeit, aus dem Verhältnisse einer andern Würkung zu ihrer Ursache und Zeit bestimmen. Z. B. wenn hier die Zinsen 720 Thlr. unbekannt wären.

2) man soll eine unbekannte Ursache welche in einer bekannten Zeit eine bekannte Würkung hervorbringt, aus dem Verhältniß dieser drei bekannten

ten Dinge finden, z. B. wenn die 4000 Thlr. zu suchen wären.

3) man soll die unbekannte Zeit finden, in welcher eine bekannte Ursach eine bekannte Würkung hervorbringt aus dem Verhältniß dreier anderer dieser Dinge, z. B. wenn man die 6 Jahre finden sollte in welchen 4000 Thlr. Kapital 720 Thlr. Zinsen geben.

Nur im ersten Falle sind die Verhältnisse **direkt**, in den beiden andern aber **verkehrt**. Weiter unten wird man dieses bestätiget finden; ich halte mich daher nur jetzt beim ersten auf, weil von den verkehrten Verhältnissen hernach besonders geredet werden soll. — Nach diesem ersten Fall müssen die 720 Thlr. Zinsen unbekannt und zu suchen seyn. Betrachtet man die beiden Proportionen a und b im 14 §. so wird auffallend, daß diese Zinsen entweder in der Zeit (nach a) oder mit dem Kapitale (nach b) in Verhältniß stehen. Folglich, will man diese Zinsen finden, so muß man das nachfolgende Glied eines Verhältnisses entweder zu der Zeit oder zu dem Kapitale suchen. Aber wie geschiehet dies Suchen? — Nach der so lange allgemein bekannten Regeldetri multipliciret man das zweite und dritte Glied einer Proportion mit einander und dividiret das Product mit dem ersten: und das kann man in einer von den Proportionen a und b im 14 §. auch thun. Aber, vom vierten Gliede ist schon der Zähler bekannt, nur der Nenner würde zu suchen seyn; wie verfährt man

man nun? — Eben so. Wenn der Quotient dem ganzen vierten Gliede gleich ist, so hat man ja nur nöthig, den schon bekannten Zähler desselben durch den Quotienten zu dividiren, um den Nenner zu erhalten: das ist, dieser Quotient und der Zähler des vierten Gliedes machen ein neues Verhältniß, wo dieser das vorhergehende jener das nachfolgende ist. Lasset uns die Arbeit selbst machen; wir werden aber die Rechnungsarten nur bezeichnen dürfen, weil die Glieder unsrer Proportionen nicht eigentlich Quotienten, sondern nur als solche bezeichnete Verhältnisse sind.

Um das vierte Glied der Proportion a) zu finden, entstünde der Quotient (oder vielmehr die Formel dafür)

$$\frac{\frac{4}{12} \times \frac{1}{4000}}{\frac{1}{100}} = \frac{(4 : 12) \times (1 : 4000)}{1 : 100} =$$

$$(100 : 1) \times (4 : 12) \times 1 : 4000) = \frac{6}{x} =$$

$$(100 : 1) \times (4 : 12) \times (1 : 4000) = 6 : x.$$

Was sagt wol deutlicher, daß das Verhältniß 6 : x aus den Verhältnissen 1 : 4000, 4 : 12 und 100 : 1 zusammengesetzt sey?

Hier will man das Verhältniß der unbekannten Zinsen zur bekannten Zeit bestimmen, sollten sie aber aus dem Kapitale, nach der Proportion b, §. 14. bestimmt werden, so würde

$$\frac{\frac{100}{12} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{(100 : 12) \times (1 : 6)}{(1 : 4)} =$$

$$(4 : 1) \times (100 : 12) \times (1 : 6) = \frac{4000}{x} = 4000 : x.$$

Das

Das Verhältniß des Kapitals zur Zeit, oder 4000 : x ist also aus den Verhältnissen 1 : 6, 100 : 12, und 4 : 1 zusammengesetzt.

§. 16.

Die ganze Arbeit, das (wegen des unbekannten Gliedes) noch unbekannte Verhältniß zu finden, bestehet also darin: man multiplicirt die Verhältnisse, woraus es zusammengesetzt ist, in einander. Will man also 6 : x haben, so ist

$$\begin{array}{r} 1 : 4000 \\ 4 : 12 \\ 100 : 1 \text{ multipliciret} \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha)\ 1 \times 4 \times 100 : 4000 \times 12 \times 1 = 6 : x$$

Und will man 4000 : x suchen, so wird man, wenn

$$\begin{array}{r} 1 : 6 \\ 100 : 12 \\ 4 : 1 \text{ multiplicieret wird,} \\ \hline \end{array}$$

$$\beta)\ 1 \times 100 \times 4 : 6 \times 12 \times 1 = 4000 : x \text{ finden.}$$

Den Werth von x nun selbst zu finden, darf man nur nach der Regeldetri verfahren. Nach der Proportion

$$\alpha) \text{ ist } x = \frac{6 \times 4000 \times 12 \times 1}{1 \times 100 \times 4}$$

$$\text{nach } \beta)\ x = \frac{4000 \times 6 \times 12 \times 1}{1 \times 100 \times 4}$$

In beiden Fällen wird also die Zahl, wozu man x sucht mit den nachfolgenden Gliedern der Verhältnisse, wor-

aus

aus es bestimmet werden muß, multiplicirt, und durch die vorhergehenden Glieder dieser Verhältnisse dividiret.

§. 17.

Die Auflösung ist also dieselbe der Kettenregel; (worin die Zahl, wozu man x sucht, die Fragezahl heißen würde:) nur erfodert diese eine gewisse Ordnung unter den Verhältnissen, und diese Ordnung wird durch die Fragezahl bestimmt. *) Für den Fall das 6 oder die Zeit die Fragezahl ist, wäre die Ordnung der Verhältnisse

Thlr. Zinsen x	:	6 Jahre
Jahre 1	:	4000 Thlr. Kap.
Thlr. Kap. 100	:	1 Jahr
Jahre 4	:	12 Thlr. Zinsen

Und für den Fall, daß das Kapital 4000 Thlr. die Fragezahl ist:

Thlr. Zinsen x	:	4000 Thlr. Kap.
Thlr. Kap. 1	:	6 Jahre
Jahre 4	:	1 Thlr. Kap.
Thlr. Kap. 100	:	12 Thlr. Zinsen

Diese Ordnung folgt deutlich, wenn man diesen zusammengesetzten Satz nach und nach in seine Proportionen zerlegt, z. B. für den letzten Fall ist

$$1 : 6 = 4000 : v$$
$$4 : 1 = v : w$$
$$100 : 12 = w : x$$

worin v und w das 4[te] Glied der Proportion bedeutet.

In

*) Man sehe die vorige Abhandlung §. 10.

In jede dieser Proportionen sind das erste und dritte, das zweite und vierte gleichnamige Glieder. *)

Es muß also wahr seyn, daß

1) die Einheit von der Ursache (den 4000 Thlr. Kap.) sich zur Zeit (6 Jahre) verhält, wie das ganze Kapital (4000 Thlr. Kap.) sich zu einer hieraus bestimmten Zeit (v) verhält;

2) daß die ganze Zeit (4 Jahre) worin die andere Ursache würkt, sich so zur Einheit dieser Ursache verhält, wie die gefundene Zeit (v) zu einer hieraus zu bestimmenden Ursache (w);

3) daß die andere ganze Ursache sich nun so zur Würkung derselben verhalte, wie die gefundene Ursache (w) zu der unbekannten Würkung x.

Läßt man die Größen v und w weg, welche sich aufheben, so wird es bestätiget, daß für den Fall, den wir jetzt betrachten, nemlich, wenn die Ursache die Fragezahl ist, allezeit die unbekannte Würkung aus folgenden Verhältnissen entstehet: Wie sich die Einheit der Ursache (Fragezahl) zur Zeit verhält; wie sich die andere Zeit zur Einheit ihrer zugehörigen Ursachen verhält; und wie sich nun diese ganze Ursache zur bekannten Würkung verhält.

Für den andern Fall, da die Zeit die Fragezahl ist, ist es eben so leicht, diese Folgerung herzuleiten: ich übergehe sie daher.

§. 18.

*) Die vorige Abhandlung §. 20.

§. 18.

Oft sind von den drei Dingen: Ursache, Zeit und Würkung, die beiden letztern zwar Eine Grösse, aber diese bestehet aus verschiedenen andern Bestimmungen. z. B. Eine Arbeit wird in 4 Wochen fertig, wenn jede Woche 6 Tage, und jeden Tag 12 Stunden gearbeitet wird. Die wahre Zeit ist hier also $4 \times 6 \times 12 = 288$ Stunden. Man weiß aber, daß sich diese wahre Zeit zu den 4 Wochen verhält, wie 1 Woche : 6 Tage und 1 Tag : 12 Stunden; und es ist bekannt, wie in der Kettenregel diese Verhältnisse gemeiniglich gesetzt werden. Für die Art Aufgaben, wovon wir bisher geredet haben (§. 7.) setzt man diese Bestimmungen, die eigentlich Eine Grösse ausmachen, nach der bekannten Weise untereinander und klammert sie zusammen.

Anders aber ist es, oder eigentlicher, es scheint es zu seyn, wenn die Würkung eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Tiefe ausmacht. Ist die Ausdehnung eine Fläche, so macht erst das Produkt der Länge und Breite dieser Fläche, die Grösse der Ausdehnung aus; und die Zahlen der Länge und Breite sind also die Faktoren der Würkung. Ist die Ausdehnung ein Körper, so ist das Produkt der Länge, Breite und Tiefe diese Ausdehnung; und die Würkung hat also drei Factoren. — Wäre man gewöhnt, eben so wie bei andern Dingen zu sagen, daß 1 Fuß lang 1 Fuß breit sey, wenn die Fläche ein Quadrat, oder daß 1 Fuß lang, 1 Fuß breit, und 1 Fuß breit 1 Fuß dick sey,

wenn

wenn von Würfeln die Rede ist, so würde man auch bei allen Ausmessungen des Raums, wie oben von den 4 Wochen und den 6 Tagen sagen, daß z. B. eine Fläche, die 24 Fuß lang und 12 breit ist, daß diese Fläche 24 Fuß lang, 1 Fuß lang aber 12 Fuß breit sey; so wie man sagt, 2 Arbeiter arbeiten 4 Wochen, und 1 Woche 6 Tage. Eben so auch, wenn von einem Körper die Rede wäre, der 2 Fuß lang, 8 Zoll breit und 4 Zoll dick, so würde man sagen: der Körper ist 2 Fuß lang, 1 Fuß lang 8 Zoll breit, und 1 Zoll breit 4 Zoll dick; so wie man sagt: 2 Arbeiter arbeiten 4 Wochen und 1 Woche 6 Tage und 1 Tag 12 Stunden. So richtig dies auch ist (§. 8.) so sagt man doch immer: die Fläche ist so lang und so breit; der Körper ist so lang, so breit, so dick, und dies ist eben so richtig. **Bei jeder Ausdehnung also, kann man von der Einheit der einen Ausmessung sagen, was man von der ganzen Ausdehnung zu sagen pflegt.**

§. 19.

Weil nun die Abmessungen des Raums die Faktoren geben, deren Produkt die ganze Ausdehnung ausmacht, so kann man dies Produkt nach §. 12. n. 1. in Proportion zerlegen, z. B. (um gleich ein ganzes Exempel zu geben) es sind 10 Mann in 4 Wochen mit der Ausgrabung eines Grabens der 120 Ruthen lang, 6 Fuß breit und 4 Fuß tief, fertig geworden, wie lang wird der Grabe seyn, welcher 12 Fuß breit, und 8 Fuß

 tief

tief ist, den 20 Mann in 2 Wochen fertig machen? Die Ausdehnung des ersten Graben ist $4 \times 6 \times 120 = 2880$ Kubic-Fuß. Diese Faktoren haben folgende Verhältnisse $1:4$, $1:6$, $120 : 4 \times 6 \times 120$ oder $12 : 1$ Graben. Denn es ist

$4 \times 6 \times 120 = 1 : 4 = 6 \times 120 : 4 \times 6\ 120 = 1$ Grabe
aber auch $6 \times 120 = 1 : 6 = 120 : 6 \times 120$.

Es findet also hier eben dieselbe Regel statt, welche wir §. 9. gesehen haben, und die Aufgaben, worin auf die Größe der Dinge gesehen wird, haben hierin keine Ausnahme.

§. 20.

Unser gegebenes Exempel würde also folgenden Aufsatz haben:

? Fuß lang	——— ——— ———	20 Mann
1 Mann (von jenen 20)	———	2 Wochen
4 Wochen	——— ——— ———	1 Mann (von den 10)
10 Mann	——— ——— ———	120 Fuß lang } vom ersten Graben
1 Fuß lang	——— ——— ———	6 Fuß breit } vom ersten Graben
1 Fuß breit	——— ——— ———	4 Fuß tief } vom ersten Graben
8 Fuß tief	——— ——— ———	1 Fuß breit
12 Fuß breit	——— ——— ———	1 Fuß lang am andern Gr.

Facit 30 Fuß lang.

Dieser völlig richtige Kettensatz enthält eine Anwendung von allen §. 7 bis 19. gelehrten. Es ist nach der Länge des Grabens die Frage, welcher von bestimmter Breite und Tiefe ist, und von 20 Arbeitern in 2 Wochen ausgegra-

gegraben werden kann. Eine von den beiden Zahlen, entweder die 20 Arbeiter oder die 2 Wochen muß die Fragezahl seyn, indem man entweder frägt: wie viel Fuß lang graben 20 Mann, oder, wie viel Fuß lang werden in 2 Wochen gegraben. Ich habe hier den ersten Fall als den gewöhnlichsten genommen. Nun kann man von der Einheit der Fragezahl das sagen, was man von derselben selbst sagt, nemlich: daß 1 Mann 2 Wochen arbeite, und daher sind (nach §. 9.) 1 Mann und 2 Wochen die folgenden Zahlen im Satze. Beim ersten Graben arbeiten 4 Wochen lang 10 Mann; also ist, weil 4 Wochen auch 1 Mann von den 10 arbeitet, 4 Wochen — 1 Mann die Folge des Satzes. Die 10 Mann machen nun einen Graben, der 120 Fuß lang, 6 Fuß breit und 4 Fuß tief ist. Oder die 10 Mann graben 120 Fuß lang, 1 Fuß lang ist aber 6 Fuß breit, und 1 Fuß breit ist 4 Fuß tief. 8 Fuß Tiefe und 12 Fuß Breite hat der andere Grabe, von welchem die Länge unbekannt ist; also 8 Fuß tief ist 1 Fuß breit und 12 Fuß breit ist 1 Fuß lang von der unbekannten Länge des andern Grabens.

§. 21.

Der Fall: daß die Ausdehnung mit im Betracht kömmt, ist nicht immer mit andern Größen verbunden, die sich als Ursachen und Zeiten verhalten; sondern es kann

1) die Zeit fehlen, und dies geschieht, wenn 2 verschiedene Ursachen 2 verschiedene Würkungen in

einerlei Zeit hervorbringen. Z. B. 4 Arbeiter belegen einen Platz 16 Fuß lang und 2 Fuß breit in eben der Zeit mit Rasen, worin 8 Arbeiter einen Platz von 16 Fuß lang und 8 Fuß breit belegen.

2) Es kann die Ursach fehlen und dies geschieht wenn verschiedene Würkungen in verschiedenen Zeiten durch einerlei Ursache hervorgebracht werden. Z. B. wenn jener erster Platz (1) mit eben den Arbeitern in 2 Tagen belegt wird, worin der andere in 4 Tagen belegt wird.

3) es kann beides, Zeit und Ursache fehlen, und dann wird entweder

a) der Größe der Ausdehnung ein gewisser Werth beigelegt und dieser in andern Einheiten angegeben; wie z. B. zu Belegung eines Fußbodens der 30 Fuß lang und 18 Fuß breit ist, braucht man 40 Stück Dielen von gewisser Länge und Breite: wo also die 40 Stück für die ganze Ausdehnung (die 600 Quadratfuß betragen würde) angegeben werden.

b) oder es wird dabei nichts, als die einzelnen Abmessungen des Raums, der Länge, Breite und Dicke oder Tiefe nach, und die ganze Größe der Ausdehnung in Betrachtung gezogen.

§. 22.

Alle diese 4 Fälle (welche außer der Grenze der Inversa liegen) sind eigentlich einfache Proportionssätze

und

und würden, nach der Kettenregel gesetzt, nur zwei übereinanderstehende Verhältnisse *) ausmachen, wenn man die Ausdehnung der Dinge als eine einzige Größe darin ansetzt, sieht man aber auf die einzelnen Ausmessungen der Ausdehnung im Satze, so entstehen so viel Verhältnisse im Satze mehr, als Ausmessungen oder Faktoren einer Größe sind, z. B. Wie viel Stück Tapeten werden zu einer Wand erfordert, die 24 Ellen lang und 6 Ellen hoch ist, wenn ein Stück Tapeten 18 Ellen lang und 1 Elle breit ist. Der Satz hievon würde nach der Regeldetri so seyn:

24 ⨯ 6 = 144 □ Ellen; 18 ⨯ 1 = 18 □ Ellen

18 □ Ellen : 1 Stück = 144 □ Ellen : x Stück

und nach der Kettenregel:

? Stück —— ——	144 □ Ellen
18 □ Ellen —— ——	1 Stück

Nach Raphael's Regel aber würde er so aussehen:

? Stück Tapeten ——	24 Ellen lang
1 Elle lang —— ——	6 Ellen hoch
1 Elle breit —— ——	1 Ellen br. (von 18 l.)
18 Ellen lang ——	1 Stück Tap.

weil sich die Einheit der Zahl der Länge zur Zahl der Höhe oder Breite verhält, wie die Zahl der ganzen Länge

*) Um zwei, in einem Kettensatze gegen einanderüberstehende Zahlen, wenn von ihnen als Zahlen, die im Kettensatze zusammengehören die Rede ist, kurz und ohne Umschreibung anzuzeigen, wäre ein besonderer Name nützlich. Wie würden sie wol heißen können?

Länge zur Ausdehnung, wofür hier nun die Zahl der Tapetenstücke gesetzt.

§. 23.

Aus diesem Allen ist es deutlich, daß bei der Ansetzung der Zahlen, die die Ausmessungen eines Raumes sind, eben die Regel nöthig ist, die §. 9. bei den ersten Unterschied der Raphaelschen Regel, von der bekannten Ketten- und Reesens Regel, gesagt worden; ich darf also nur darauf zurückweisen.

Denjenigen zu Gefallen, welchen diese Methode noch neu ist, auch das davon herausgegebene Buch nicht haben, gebe ich hier den Satz von jeden der §. 21. angebenen vier Fälle, mit einigen Anmerkungen, in den §. 24 — 28.

§. 24.

10 Maurer machten in einem Monath eine Mauer die 60 Fuß lang, 9 Fuß hoch, und 2½ Fuß dick war; wieviel Maurer sind nöthig, eine Mauer die 90 Fuß lang, 6 Fuß hoch und 2 Fuß dick ist, zu machen? Es ist natürlich die Frage: Wieviel Maurer sind nöthig zu 1 Mauer? Man könnte zwar diese Frage weglassen und gleich fragen, wieviel Maurer sind nöthig 90 Fuß lang zu mauern? aber für Schüler und Anfänger ist die erste Frage nützlich: man setzt so wie unsere Gedankenfolge ist, und die letzte Frage ist gewissermaßen schon ein Sprung.

Der

Der Aufsatz ist also dieser:

A)	? Maurer	—— ——	1 Mauer
	1 Mauer	—— ——	90 Fuß lang
	1 Fuß l.	—— ——	6 Fuß breit
	1 Fuß br.	—— ——	2 Fuß dick
	$2\frac{1}{2}$ Fuß d.	—— ——	1 Fuß hoch
	9 Fuß h.	—— ——	1 Fuß lang
	60 Fuß l.	—— ——	1 Mauer
	1 Mauer	—— ——	10 Maurer

Facit 8 Maurer.

Hier war nach der Ursache einer Würkung die Frage; wir wollen nun unser Beispiel umschaffen, und die 8 Maurer als bekannt annehmen, die Höhe der Mauer aber als unbekannt ansehen und suchen. Wie wäre hier wol die Frage? Natürlicherweise nicht anders als: ? (wie viel) Fuß hoch ist 1 Mauer? Man fahre nun nach den Raphaelschen und den gemeinen Regeln der Kettenregel fort, so wird man auch hier leicht einen verständlichen Aufsatz erhalten. Hier ist er:

B.	? Fuß hoch	—— ——	1 Mauer
	1 Mauer	—— ——	90 Fuß lang
	1 Fuß lang	—— ——	2 Fuß dick
	8 Maurer	—— ——	10 Maurer
	$2\frac{1}{2}$ Fuß dick	—— ——	1 Fuß lang
	60 Fuß lang	—— ——	1 Mauer
	1 Mauer	—— ——	6 Fuß hoch

Facit 9 Fuß hoch.

Ein

Ein ähnlicher Satz würde es werden, wenn die Länge oder Dicke der Mauer zu suchen wäre.

§. 25.

2. Einst gruben 200 Festungsgefangene einen Graben, der 200 Ruthen lang, 20 Fuß breit und 12 Fuß tief war, in 24 Tagen aus; in wie viel Tagen werden eben so viel dergleichen Arbeiter einen Graben 480 Ruthen lang, 24 Fuß breit und 10 Fuß tief graben?

Weil die Anzahl der Arbeiter gleich ist, so fallen sie in der Berechnung weg. Die Frage ist hier: In wie viel Tagen wird ein Grabe fertig? und folglich der Aufsatz:

a)	? Tage	—— ——	1 Grabe
	1 Grabe	—— ——	480 R. l.
	1 R. l.	—— ——	24 F. br.
	1 F. br.	—— ——	10 F. t.
	12 F. t.	—— ——	1 F. br.
	20 F. br.	—— ——	1 R. l.
	200 R. l.	—— ——	1 Grabe
	1 Grabe	—— ——	24 Tage

Facit. $57\frac{3}{5}$ Tage.

Wäre die Zeit der $57\frac{3}{5}$ Tage bekannt, man wollte aber z. B. die Länge des zu machenden Grabens wissen, so wäre die Frage: ? Ruthen lang ist ein Grabe? und die Befolgung der bekannten Regeln giebt die Kette.

b)

b) ? Ruthen lang	——	1 Mauer
1 Mauer	—— ——	24 Fuß breit
1 Fuß br.	—— ——	10 Fuß tief
$57\frac{3}{5}$ Tage	—— ——	24 Tage
12 Fuß t.	—— ——	1 Fuß breit
20 Fuß br.	—— ——	1 Graben
1 Graben	—— ——	200 Ruthen lang.

Facit 480 Ruthen lang.

§. 26.

In den Aufsätzen B und b, §. 24 und 25 wird man die Kette gebrochen finden. Man siehet in B 8 Maurer und 10 Maurer, und in b $57\frac{3}{5}$ Tage und 24 Tage, außer der Kettenfolge gesetzt, und hierüber muß ich noch eine Anmerkung hinzufügen.

Man versuche es, die Sätze in völlige Kettenfolge zu bringen, man wird es aber nach den bisherigen Regeln unmöglich finden. Gemeiniglich pflegen einige z. B. B also zu setzen:

? Fuß hoch	—— ——	1 Mauer
1 Mauer	—— ——	90 Fuß lang
1 Fuß lang	—— ——	2 Fuß dick
$2\frac{1}{2}$ Fuß dick	—— ——	1 Fuß lang
60 Fuß lang	—— ——	1 Mauer
1 Mauer	—— ——	10 Maurer
8 Maurer	—— ——	1 Mauer
1 Mauer	—— ——	6 Fuß hoch

wel-

welches auch das richtige Facit 9 Fuß giebt. Der Satz hat aber nur eine **scheinbare** Kette und keine wahre; indem

8 Maurer —— —— 1 Mauer
1 Mauer —— —— 6 Fuß hoch

am Ende des Satzes eine gänzliche Unwahrheit saget. Es wird nemlich angedeutet, daß 1 Mauer die $2\frac{1}{2}$ Fuß dick und 60 Fuß lang ist, verfertiget wird, daß an dieser

1 Mauer —— 10 Maurer

arbeiten, das ist richtig; eben so daß wiederum

8 Maurer —— 1 (andere) Mauer

verfertigen: daß aber diese

1 Mauer —— 6 Fuß hoch

ist, daß ist, wie man bei einer kleinen Betrachtung der Aufgabe sehen kann, falsch. — Diese Art Fehler haben theils ihren Grund in den Regeln, die man zur Befolgung für die Kettenregel erlernet hat, theils in dem nicht genugsam deutlichen Begriffe von den Dingen von **einerlei Art**. Die Regel: daß in einem Kettensatze in beiden Kolumnen einerlei **Namen**, (Benennung) vorkommen sollen, und daß man mit dem **Namen**, mit welchem in der rechten Kolumne aufgehöret ist, gleich darauf in der Kolumne zur Linken angefangen wird — diese Regel ist eine verführerische Wegweiserinn. In dem letzten Aufsatze ist man ihr völlig gefolgt, und doch ist der Satz falsch. Nicht die **Namen** der bekannten Zahlen einer Aufgabe bestimmen die Kette: es müssen Zahlen **von einerlei Art** seyn, womit

auf-

aufgehöret und angefangen wird, und welche, wenn man das zu suchende Facit mit in die linke Reihe setzet, in der einen Kolumne so oft vorkommen muß, wie in der andern. Aber was sind gleichartige Zahlen? (Eine Frage deren Beantwortung mancher Lehrer der Rechenkunst — nicht weiß.) Die Gleichartigkeit der Zahlen beruhet auf der Art ihrer Entstehung. Eine Zahl kann aus andern entstehen oder nicht. Entstehen zwei Zahlen völlig auf einerlei Art, so sind sie auch **völlig gleichartig**; sind sie dies nicht, aber die eine kann aus der andern entstehen, so sind sie nur **in dem Grade der Entstehung verschieden**; können sie aber auch dies nicht, so sind sie **völlig verschieden**. Die Zahlen die in der Kette einerley Art seyn sollen, müssen ganz von den völlig gleichartigen seyn. — Doch ich schweife aus: — Eine Anmerkung zu einer Anmerkung, die doch aber alle Aufmerksamkeit verdient.

Soll also der Aufsatz richtig seyn, so muß nothwendig die Kette gebrochen werden, ehe wir nicht andere Mittel wissen, diesen Bruch zu verhüten, und zwar darum, weil wo die Arbeiter einerlei sind, sich die Zeiten **verkehrt** verhalten, und da, wo die Zeit einerlei ist, die Arbeiter im **verkehrten** Verhältnisse stehen. Dies verkehrte Verhältniß hindert an der Ketten-Folge; indem selbige aus lauter **direkten** Verhältnissen bestehen muß. Könnte man z. B. in dem Aufsatze b sagen:

? Arbeiter —— —— 1 Mauer
1 Mauer —— —— $57\frac{3}{5}$ Tage
24 Tage —— —— 1 Mauer
1 Mauer ꝛc.

oder eine andere Wendung nehmen, ohne daß man an das Unwahre scheiterte, so würde eine stete Kettenfolge bleiben. Es wird unter der Betrachtung über diese Rechnungsmethode bei der Regel-Inversa ein Mittel gewiesen werden, dies Verhältniß, und also auch den Bruch der Kettenfolge zu vermeiden.

Die Ursache, warum ich dies verkehrte Verhältniß in die Mitte des Satzes setze, ist, weil es sich da besser mechanisch bestimmen läßt. Nemlich, wenn ich im Satze mit der einen Würkung zu Ende bin, so fange ich mit der Ursache oder der Zeit derselben Würkung wieder an, und setze dieser Ursache oder Zeit, die Ursache oder Zeit der andern Würkung gegenüber, mit welcher Würkung ich denn fortfahre den Satz zu vollenden. In dieser Kleinigkeit liegt eine gewisse Erleichterung in Setzen, und es ist in dieser gebrochenen Kette doch eine gewisse Kettenfolge. In der Folge, wenn ich von der Raphaelschen Methode bei der Regel-Inversa handeln werde, werde ich diese Fälle noch einmal berühren, weil wir dann die Mittel wissen, dies verkehrte Verhältniß zu vermeiden. — In Meyer Aaron's bekannt gemachter Raphael Levi Rechnungsmethode sind unter der großen Menge der Exempel doch diese Fälle nicht.

§. 27.

§. 27.

Nun wäre der dritte Fall (§. 21, n. 3, a) wenn Ursachen und Zeiten fehlen, aber die Größe der Ausdehnung in andern Einheiten angegeben wird, zu betrachten. Hierbei ist nichts besonders, dieserwegen setze ich nur ein Exempel. Jemand läßt einen Fischteich graben, der 64 Ruthen lang, 32 Ruthen breit, $1\frac{3}{16}$ R. tief, verdingt solches von 2 Ruthen lang, $1\frac{1}{2}$ Ruthe breit, 1 Ruthe tief, 22 Groschen zu bezahlen. Wie viel wird der Fischteich zu graben kosten?

? Thaler	—— ——	1 Fischteich
1 Fischteich	—— ——	64 Ruth. l.
1 R. l.	—— ——	32 R. br.
1 R. breit	—— ——	$1\frac{3}{16}$ R. tief
1 R. tief	—— ——	1 R. breit
$1\frac{1}{2}$ R. br.	—— ——	1 R. tief
2 R. l.	—— ——	22 Gr.
36 Gr.	—— ——	1 Thlr.

Facit 495 Thlr. 14 Gr. $5\frac{1}{2}$ Pf.

Dies Beyspiel ist aus Raphael Levi's Rechnungsmethode herausgegeben von Meyer Aaron (S. 114. n. 50.) entlehnt, und ich muß hier anmerken, daß in dem davon gegebenen Satze:

1 Ruthe tief —— 1 Ruthe breit

wo von der Größe der für 22 gr. bedungenen Arbeit die Rede ist, fehlet. Ohnehin pflegt man auch dergleichen Arbeit, nicht nach Kubikruthen, besonders aber,

nicht

nicht so, wie im Exempel angegeben worden, von so verschiedener Länge, Breite und Tiefe, sondern nach Schachtruthen zu bedingen und zu vergüten.

§. 28.

Endlich der letzte Fall, wo nichts als die ganze Größe der Ausdehnung und ihre einzelnen Abmessungen in Betracht kommen (§. 21. n. 3. b.). Hier ist entweder nach der Größe der ganzen Ausdehnung oder nach einer von ihren Ausmessungen die Frage. Dieser Fall wird aber selten nach dieser Methode angesetzt werden, indem eine bloße Multiplication der Abmessungen die Körpergröße, und eine Division der bekannten Abmessungen in die ganze Größe der Ausdehnung die verlangte Abmessung giebt. Doch aber auch nur zur Vollständigkeit setze ich hier die Aufsätze von zween Exempeln zu diesem Fall.

1) Wie viel Kubikfuß hat eine Mauer welche 60 Fuß lang 12 Fuß hoch und 2 Fuß dick ist?

? Kubickfuß	—— ——	1 Maurer
1 Maurer	—— ——	60 Fuß lang
1 Fuß lang	—— ——	12 Fuß hoch
1 Fuß hoch	—— ——	2 Fuß dick
†) 1 Fuß dick	—— ——	1 Fuß hoch
1 Fuß hoch	—— ——	1 Fuß lang
1 Fuß lang	—— ——	1 Kubickfuß

Facit 1440 Kubickfuß.

Von

Von †) an, könnte der Satz wegbleiben, und käme eben das Facit: aber die Kette fordert diese Folge, welche natürlich daher entstehet, weil ein Kubickfuß, als das Maaß, womit alle Körpermaaße verglichen werden müssen, 1 Fuß Länge, 1 Fuß Breite und 1 Fuß Dicke oder Tiefe hat.

2) Wie lang ist eine Mauer, die 1440 Kubickfuß enthält, und 12 Fuß hoch und 2 Fuß dick ist? Dies ist eine Frage vom andern Falle. Die Antwort wäre freilich leichter durch $\frac{1440}{12 \times 2} = 60$ Fuß, zu finden, und ich glaube, es wird niemand darum erst einen Kettensatz machen. Hier ist er aber, und zwar blos um den Liebhaber zu befriedigen. Ganz leicht ist er auch nicht.

? Fuß lang	—— ——	1 Mauer
1 Mauer	—— ——	1440 Kubickfuß
1 Kubickfuß	—— ——	1 Fuß lang
1 Fuß lang	—— ——	1 Fuß hoch
1 Fuß hoch	—— ——	1 Fuß dick
2 Fuß dick	—— ——	1 Fuß hoch
12 Fuß hoch	—— ——	1 Fuß lang

Facit 60 Fuß lang.

§. 29.

Wären wir gewohnt, z. B. wenn 4 zugleich arbeitende Arbeiter an etwas 8 Tage zu verfertigen, zubringen, dann zu sagen 4 Arbeiter arbeiten, und Einer

(davon) 8 Tage; oder 8 Tage wird gearbeitet, und jeden (Einen) Tag arbeiten 4 Arbeiter, so wie man saget: 8 Ellen sind gekauft und Eine Elle (davon) kostet 2 Thlr. so würde vielleicht eher der Kettensatz so ausgefallen seyn. Weil aber die ganze Zeit von der ganzen Ursache zu sagen, der allgemeine Sprachgebrauch ist, da doch die Einheit der Zeit von der ganzen Ursache, und die Einheit der Ursache von der ganzen Zeit mit Recht gesagt werden kann, wäre denn dies nicht ein neuer Beitrag zum Beweise der Wahrheit: Der Mensch bleibt immer bei dem Ganzen der Dinge stehen, und auf die Einheiten, aufs Individuum zurückzugehen, dazu müssen erst Umstände ihn nöthigen? Bei der Ausdehnung gehen wir immer gleich auf das Ganze derselben zurück, und übergehen bei der Fläche Eine, und bei dem Körper zwei Abmessungen wovon man das sagen könnte, was wir von dem Ganzen sagen. — Dies soll nur eine Anmerkung seyn. —

§. 30.

Dies besondere, wovon sich die Raphael-Levische Rechnungsmethode in Aufsätzen worin die Ausdehnung vorkömmt, von den bisherigen Methoden unterscheidet, ist aber nicht ganz neu und unbekannt, sondern ich habe schon anderwärts Spuren davon angetroffen. Man sehe in Clemms mathematischen Lehrbuche *)

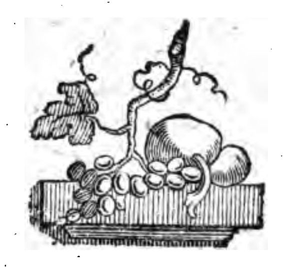
Ir Theil

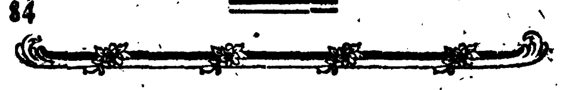
*) Stuttgart 1764, 1768 und 1776.

r Theil im 381 §. die letzte Aufgabe und in Huth's kürzeste und leichteste Art zu rechnen ꝛc. *) von Seite 120 bis 146 und von Seite 177 bis 183 die daselbst berechnete Aufgaben an, so wird man sich davon überführen können. Hätte Huth nach der Kettenregel gesetzt, so würden seine Sätze dieser Art ganz mit den Raphaelschen gleich gekommen seyn; er setzte aber nach der Reesischen Regel auf.

*) Halberstadt 1774, 1778.

(Die Fortsetzung im folgenden Stücke.)





IV.

Von Leibrenten und Wahl tauglicher Todtenlisten zu ihrer Berechnung.

Von den Herrn Schatzdep. **P. P. Guden.**

(Aus dem 1. St. des Leipz. Magaz. vom Jahre 1782.)

Es ist bekannt, daß die Engländer zuerst richtige Regeln zur Berechnung der Leibrenten *) gefunden, welche hernach **Deparcieux** unter den Franzosen, **Kerseborn** unter den Holländern, und Herrn **Euler** unter den

*) Hier sey eine kurze Erklärung der Leibrenten für diejenigen hingeschrieben, die in dieser Anwendung der Arithmetik noch Anfänger sind. — Der Begriff einer Rente pflegt oft mit jährlichen Zinsen, sehr unrecht verwechselt zu werden. Eine Rente ist ein jährlicher Genuß welchen man vermöge eines Vertrages, gewisse Jahre hindurch, von einen gewissen Kapital empfängt, z. B. Ich gebe Tito 2700 Thaler, mit dem Beding, mir dafür jährlich 300 Thlr. und zwar 12 Jahre hintereinander zu geben; so ist die jährliche Einnahme der 300 Thlr. die Rente von dem Kapitale (welches nun die Mise genennet wird,) welche ich (der Rentenier) die festgesetzten 12 Jahre vom Tito (dem Entrepreneur) zu empfangen habe. Eine solche Rente ist eine Jahr- oder Zeitrente, welche nach verflossenen festgesetzten Jahren zu Ende ist. — Anders ist die Leibrente: bei dieser schließt man den Vertrag so, daß man die jährliche Rente auf Lebenszeit genieße. Wie lange man lebe, ist ungewiß; und also

den Deutschen, in den Memoires de l'Academie des sciences de Berlin vom Jahr 1760 ausführlicher erkläret haben, unter welcher der Letzte durch seine Kürze, Genauigkeit und bekannten Scharfsinn sich vorzüglich auszeichnet. Der Doctor Seyberth hat 8 Jahre hernach die Eulerischen und Deparcieurischen Berechnungen

also ist auch die Anzahl der Jahre ungewiß, wie lange der Entrepreneur mir die Rente auszuzahlen habe. Nach gewissen Gründen, welche hier vorzutragen der Ort nicht ist, berechnet man aus den Todten= Geburts= oder andern Listen von großen und kleinen Provinzen, die wahrscheinliche Lebensdauer eines gesunden Menschen von diesem oder jenem Alter. In einer Gesellschaft von Rentenier nimmt man alsdann eine aus dieser wahrscheinlichen Lebensdauer zu berechnenden mittleren Lebensdauer für die wahre an, und kann dies thun, weil man nur zu wissen braucht, wieviel Jahre alle Mitglieder der Gesellschaft noch zu leben haben.

Nun habe ich noch den Unterschied zwischen wahrscheinlicher und mittlerer Lebensdauer zu erklären. — Wenn ich aus vielen Erfahrungen ersähe, daß von 10000 Menschen nach 19 Jahren noch etwas mehr, wie die Hälfte lebt, und nach 20 Jahren mehr als die Hälfte gestorben ist, urtheile ich dann nicht: ein ganz junges Kind werde wahrscheinlich 19 Jahr alt werden? Sehe ich aber auch, daß von diesen 10000 neugebohrnen Kindern nach einem Jahre nur noch 7417, nach 2 Jahren 6760, nach 3 Jahren 6459 u. s. w. leben, und verfolge diese Beobachtung bis dahin, daß sie alle gestorben sind, so werde ich finden, daß ohngefehr eines davon 103 Jahr alt geworden ist. Die ersten 10000 Menschen leben also, weil jeder 1 Jahr lebt, zusammen 10000 Jahre; die Einjährigen 7417 noch jeder wieder 1 Jahr, also alle, 7417 Jahr; die Zweijährigen 6760 wieder noch ein Jahr, also zusammen 6760 Jahr;

gen in seiner Schrift de redito annuo, præsertim vitalitio, zusammengefaßt lateinisch, H. Pr. Chassot de **Florencourt** aber in seinen Abhandlungen aus der politischen Rechenkunst, deutsch vorgetragen, und ihnen die Moivrische Probleme und Lambertischen Berechnungen annoch hinzugefügt.

Ich will mich daher mit Erklärung dieser Regeln hier nicht langwierig aufhalten, sondern sie aus vorgedachten Memoires also, wie Herr Euler daselbst S. 167 u. f. vorgetragen hat, hersetzen. Man verlangt nämlich

> das Einsatzgeld x für eine Leibrente r von 100 Thlr. zu finden, welches eine Person von gegebenen Alter m, z. B. von 52 Jahren, auf einmal zur Kasse bezahlen muß.

Die Auflösung hievon ist folgende:

1) Man zähle, wie viel Personen im gegebenen Alter von 52 Jahren auf der Mortalitätstabelle entweder

setzte ich dieses so fort, so müßte die Summe von allen diesen Lebensjahren, die Summe seyn, wie lange die 10000 Menschen insgesammt gelebt hätten. Diese Summe ist nun 294294 Jahre: dividirt man diese 294294 mit 10000, so findet man 29,4294 Jahre für die mitlere Lebensdauer eines Neugebohrnen; es wird aber für 29,4294, 29,27 Jahre angenommen, indem man noch ein halb Jahr abziehet, weil man die Sterbelisten von Jahr zu Jahr berechnet, und man doch annehmen kann, daß die eine Hälfte der Gestorbenen von jedem Alter in der ersten Hälfte des Jahrs gestorben ist.

weder des Ob. Consist. Raths Süsmilch in Göttl. Ordn. Th. II. §. 461, oder einer andern richtig verfaßten und tauglichen Mortalitätstabelle dermalen am Leben sind, z. B. in angenommenen Falle leben 560 zwei und funfzig jährige Personen (m)

2) Man setze, daß so viel Personen (m) von 52 Jahren sich Leibrenten kaufen wollen, und zähle auf der Mortalitätstabelle, wieviel davon in jedem Jahre bis zum höchsten Alter am Leben geblieben sind. Z. B. im ersten Jahre 549 = (m + 1), im zweiten Jahre 538 = (m + 2), im dritten Jahre 526 = m + 3) u. s. w. bis (m + n).

3) Nun soll jeder 52 jährige Rentenier auf einmal so viel Einsatzgeld zur Kasse zahlen, daß er und seine in jedem Jahre überbliebene Mitgenossen ihre Leibrenten bekommen können. Der 52 jährige Rentenier muß also bezahlen nach 1 Jahre (m + 1) r, nach 2 Jahren (m + 2) r und auf einmal für alle folgende Jahre zusammengenommen eine Summe = (m) r = (m + 1) r + (m + 2) r - - - - - + (m + n) r

4) Weil dieses Einsatzgeld Zinse und Zinseszinse, z. E. zu 5 Procent, oder $\frac{105}{100}$ oder $\frac{21}{20}$ tragen soll, so nenne man diese Zinseszinsen λ. Alsdenn wird der Ausdruck für (m) x seyn m x =

$$\frac{(m+1)\,r}{\lambda} + \frac{(m+2)\,r}{\lambda} + \frac{(m+3)\,r}{\lambda} \dots \text{ꝛc.}$$

Nun

Nun giebt die Algebra Vorschriften, wie man diese Glieder mit Zinsen und Zinsenzinsen bequem zusammenrechnen und ausdrücken und dadurch den Werth von x finden soll. *)

Des

*) Nemlich: $\frac{(m+1)r}{\lambda} + \frac{(m+2)r}{\lambda^2} + \frac{(m+3)r}{\lambda^3} + \ldots\ldots \frac{(m+n)r}{\lambda^n}$ ist eine Reihe Brüche wovon augenscheinlich der Generalnenner λ^n seyn muß. Addirt man diese Reihe, so muß die Summe (= S) mx gleich seyn. Hier ist die Addition.

Brüche	Gemeinsch. Nenner λ^n	Neue Zähler
$\frac{(m+1)r}{\lambda}$	$\lambda^{n-1} \times m+1 \times r$	$= (m\lambda^{n-1} + \lambda^{n-1})r$
$\frac{(m+2)r}{\lambda^2}$	$\lambda^{n-2} \times m+2 \times r$	$= (m\lambda^{n-2} + 2\lambda^{n-2})r$
$\frac{(m+3)r}{\lambda^3}$	$\lambda^{n-3} \times m+3 \times r$	$= (m\lambda^{n-3} + 3\lambda^{n-3})r$
|	|	|
$\frac{(m+n-1)r}{\lambda^{n-1}}$	$\lambda^1 \times m+(n-1) \times r$	$= (m\lambda + n-1\lambda)r$
$\frac{(m+n)r}{\lambda^n}$	$1 \times m + n \times r$	$= (m+n)r$

Die neuen Zähler bestehen aus zwei Gliedern, das erste bestehet aus dem Faktor m, welcher der ganzen Reihe ge-

Deparcieux hat zwar in seinem Essay sur la probabilite de la durée de la vie humaine p. 58. erinnert, wenn man bey dieser Rechnung annähme, daß von 560 Renteniers im ersten Jahre 11 gestorben, und 549 am Leben geblieben wären, denen die Kasse ihre Renten zahlen müßte, so setzte man voraus, daß diese 11 Personen gleich im Anfange des Jahrs gestorben wären, und die Kasse nicht mehr als 549 Leibrenten fürs ganze Jahr auszahlen müßte. Allein diese 11 Personen wären erst am Ende des Jahrs zusammen gestorbn. Im Anfange bis zur Mitte des Jahres lebten

gemeinschaftlich ist, und der abnehmenden geometrischen Reihe $\lambda^{n-1} + {}^{n-2} \ldots\ldots + 1$ als dem andern Faktor. In dieser Reihe ist der Exponent $\frac{1}{\lambda}$, oder kehrt man die Reihe um (welches hier sehr bequem ist) λ; so ist die Summe der Reihe $= \frac{\lambda^{n-1}}{\lambda - 1}$ der erste Theil der Reihe ist also

$m\left(\frac{\lambda^{n-1}}{\lambda - 1}\right)$ Die Summe der neuen Zähler wäre also:

$$(m.\frac{\lambda^{n-1}}{\lambda - 1} + \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \ldots\ldots + (n-1)\lambda + n)\, r$$

weil nun $mx = S$; so ist

$$mx = (m.\frac{\lambda^{n}-1}{\lambda - 1} + \lambda^{n-1} \ldots\ldots + (n-1)\lambda + n)\, r$$

$$x = r\left(\frac{\lambda^{n}-1}{\lambda - 1} + \frac{\lambda^{n-1} + 2\lambda^{n-2} \ldots (n-1)\lambda + n}{m}\right)$$

ten allerdings noch mehrere als 549 Rentenirers, und diese überzähligen würden daher entweder keine Leibrente bekommen können, oder aber die Kasse Schaden leiden müssen. Wegen dieser Ursache räth er an, daß die Hälfte der 11 gestorbenen Personen genommen, und zu den 549 lebenden addirt werden mögten, dergestalt, das 554 bleiben, und mit dem folgenden eben so verfahren werden müßte. **Seyberth** ist ihm im a. O. S. 95. hierin gefolgt, und hat solches für nöthig erachtet.

Jedoch die Leibrenten werden insgemein nach Verlauf eines Jahrs nach erlegten Einsatzgeldern, bezahlt, und dürfen daher beim Ende des Jahrs nur an 549 am Leben gebliebene Personen ausgezahlt werden, mithin darf man nur auf so viel Rechnung machen, und die ganze Erinnerung ist unstatthaft.

Ob nun wohl diese Regeln an sich völlig richtig sind, so hat man gleichwol bisher weder in Frankreich noch Engelland, Holland und Deutschland Leibrenten, so nach diesen Regeln richtig berechnet sind. Die Ursache bestehet darin, daß man keine taugliche Sterbelisten dazu gebraucht hat. Sind diese untauglich, mangelhaft, und nicht zweckdienlich, so können die Leibrenten, bei deren Berechnung sie zum Grunde gelegt sind, unmöglich richtig seyn. **Deparcieux** glaubte keine bessere Listen, als die Tontinitenlisten, und **Kerseboom** keine bessere als Sterbelisten aus holländischen Leibrentenregistern, gebrauchen zu können, und die Engelländer haben sich der Sterbelisten aus der Stadt London bedient.

Die

Die nach diesen Listen berechnete Leibrenten differiren so sehr von einander, als die Sterblichkeit unter diesen Nationen nimmermehr differiren kann *)

(Die Fortsetzung künftig.)

*) Hier eine Anmerkung: meine Gedanken über diese Wahl der Sterbelisten zu Leibrenten. — Gewiß ist es, wenn die Staaten nicht das Gegentheil festgesetzt haben, weil denn auch Ausländer in eine Leibrentengesellschaft sich einkaufen können, daß daher die Sterblichkeitsordnung nicht für eine besondere Provinz geltend seyn darf. Allgemein ist sie aber darum eben so wenig. Die Rentenier machen ja unter der Masse von Menschen einen Ausschuß aus, deren Leben dauerhafter seyn muß, als das Leben der Masse im Durchschnitt genommen. Denn die Eltern, die ihren Kindern eine Leibrente kaufen wollen, werden diese nicht so lange warten bis die Kinder die hauptsächlichsten Kinderkrankheiten, z. B. Blattern, überstanden, worin ein großer Theil derselben stirbt? werden sie nicht warten, bis sichere Zeichen einer wahrscheinlichen Gesundheit da sind? Und wird der Erwachsene eine Rente erkaufen, wenn seine Leibeskonstitution es ihm sagt, daß er sie nicht lange genießen werde? — Gewiß nicht. Man kann also sicher annehmen, daß eine Leibrentengesellschaft eine Gesellschaft sey, deren Mitglieder gewiß die beste Gesundheit haben. Diese Ausgewählten, aus der Zahl derer von vermischter Gesundheit, müssen also nothwendig länger leben, und eine von der allgemeinen Sterblichkeitsordnung differirende Ordnung haben. Daher wird man auch nicht von der Ordnung der Rentenier geradezu auf die allgemeine Sterblichkeitsordnung schließen können, und dies scheint Herr Guden in dieser Abhandlung gethan zu haben.

Was für eine Ordnung wird man denn nun zum Grunde legen? — Keine würde gewiß besser dazu passen, als eine aus Erfahrung bey Renteniers gezogene Ordnung. Kersseboom und Deparcieux haben uns dergleichen mitgetheilt: ersterer, wobei er aber auch Holländische Dörfer mit in Rechnung gebracht; und letzterer einzig aus den Tontinenlisten in Frankreich. Diese letzteren haben den Vorzug, und können mit völligem Rechte zum Grunde gelegt werden. Die Vorwürfe die Herr Guden in der Folge dieser Ordnung macht, können sie in Hinsicht auf die Leibrenten nicht treffen, weil selten Kinder vor dem dritten Jahre Renteniers werden.



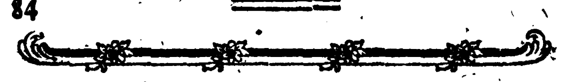
V. Nachrichten, Auszüge und Beurtheilungen arithmetischer Bücher.

Tabulæ arithmeticæ Προσθαφαιρέσεως universales, quarum subsidio Numerus qualibet, ex Multiplicatione producendus, per solam Additionem: & quotiens quilibet, e Diuisione eliciendus, per solam Subtractionem, sine tædiosa & lubria Multiplicationis atque Diuissionis Operationes etiam ab eo, qui Arithmetices non admodum sit gnarus, exactè, celeriter & nullo negotio invenitur. E Museo JOHANNIS GEORGII HERWART AB HOHENBURG V. I. Doctoris, Ex Assessore Summi Tribunalis Imperatery, & ex Cancellario Supremo Serenissmi vtriusque Bauariæ Ducis, suæ Serenmæ Celsitudinis Consiliary ex intimis, Præsidis prouintiæ Schuabæ & inclytorum vtriusque Bauariæ Statuum Cancellary. Monachii Bauariarum ex Officina Nicolai Henrici. Anno Christi 1610. Ein sehr großer Foliante, 1 Titelblat, 7 Seiten Einleitung, 999 Seiten voller Ziefern, also 250 Bogen oder 10 Alphabeth 20 Bogen; in allen 11 Alphabeth.

Der

Der Herausgeber dieses colossalischen Einmaleins ist also kein andrer, als der so berühmte Staatsmann und Geschichtschreiber, dessen sehr wichtiges und seltenes Werk; Ludouicus IV Imperator defensus zu München 1618, 1619, in gr. 4. herausgegeben, und in der Hamburg. Historisch. Bibliothek Cent. VIII. Art. 97. beschrieben wird, welches, ob es gleich verbothen worden, unter den Titel Appendix Annalium Ecclesiasticorum Tom. XIV. a BZOVIO conscripti zu München 1621 Fol. dennoch wieder erschienen, wovon in den Nachrichten von einer Hallischen Bibliothek II. Bd. S. 237. f. gehandelt wird. *) Aber von diesem arithmetischen Werke findet man weder in Bayles hist. krit. Wörterbuche, noch sonst, noch in der ihm vorgesetzten Einleitung irgend eine Anzeige, was wohl die Veranlassung dazu gewesen seyn möge. Jede Kolumne ist in 11 Spalten abgetheilt, welche, die erste ausgenommen, mit 0, 100, 200, 300 = = = 900 überschrieben. Jede erste Spalte erhält die ersten 100 Zahlen. Jede zweite, die mit 0 überschrieben ist, fängt sich mit einer Zahl an, die um 1 größer ist, als die Seitenzahl, folglich z. E. auf der 99sten Kolumne mit 100. Also enthält von einer solchen Zahl, die mit 0 überschriebene Spalte das 1, 2, 3, = = 100fache. Nimmt man nun die Summe von einem Hundert, mit welchem eine Spalte überschrieben ist, und eine von den ersten

*) Er starb 1622, in Allg. Gelehrt. Lexic. ist 1522, ein Druckfehler.



IV.
Von Leibrenten und Wahl tauglicher Todtenlisten zu ihrer Berechnung.

Von den Herrn Schatzdep. P. P. Guden.

(Aus dem 1. St. des Leipz. Magaz. vom Jahre 1782.)

Es ist bekannt, daß die Engländer zuerst richtige Regeln zur Berechnung der Leibrenten *) gefunden, welche hernach **Deparcieux** unter den Franzosen, **Kersseborn** unter den Holländern, und Herrn **Euler** unter den

*) Hier sey eine kurze Erklärung der Leibrenten für diejenigen hingeschrieben, die in dieser Anwendung der Arithmetik noch Anfänger sind. — Der Begriff einer Rente pflegt oft mit jährlichen Zinsen, sehr unrecht verwechselt zu werden. Eine Rente ist ein jährlicher Genuß welchen man vermöge eines Vertrages, gewisse Jahre hindurch, von einen gewissen Kapital empfängt, z. B. Ich gebe Tito 2700 Thaler, mit dem Beding, mir dafür jährlich 300 Thlr. und zwar 12 Jahre hintereinander zu geben; so ist die jährliche Einnahme der 300 Thlr. die Rente von dem Kapitale (welches nun die Mise genennet wird,) welche ich (der Rentenier) die festgesetzten 12 Jahre vom Tito (dem Entrepreneur) zu empfangen habe. Eine solche Rente ist eine Jahr- oder Zeitrente, welche nach verflossenen festgesetzten Jahren zu Ende ist. — Anders ist die Leibrente: bei dieser schließt man den Vertrag so, daß man die jährliche Rente auf Lebenszeit geniesse. Wie lange man lebe, ist ungewiß; und also

den Deutschen, in den Memoires de l'Academie des sciences de Berlin vom Jahr 1760 ausführlicher erkläret haben, unter welcher der Letzte durch seine Kürze, Genauigkeit und bekannten Scharfsinn sich vorzüglich auszeichnet. Der Doctor Seyberth hat 8 Jahre hernach die Eulerischen und Deparcieurischen Berechnungen

also ist auch die Anzahl der Jahre ungewiß, wie lange der Entrepreneur mir die Rente auszuzahlen habe. Nach gewissen Gründen, welche hier vorzutragen der Ort nicht ist, berechnet man aus den Todten= Geburts= oder andern Listen von großen und kleinen Provinzen, die wahrscheinliche Lebensdauer eines gesunden Menschen von diesem oder jenem Alter. In einer Gesellschaft von Rentenier nimmt man alsdann eine aus dieser wahrscheinlichen Lebensdauer zu berechnenden mittleren Lebensdauer für die wahre an, und kann dies thun, weil man nur zu wissen braucht, wieviel Jahre alle Mitglieder der Gesellschaft noch zu leben haben.

Nun habe ich noch den Unterschied zwischen wahrscheinlicher und mittlerer Lebensdauer zu erklären. — Wenn ich aus vielen Erfahrungen ersähe, daß von 10000 Menschen nach 19 Jahren noch etwas mehr, wie die Hälfte lebt, und nach 20 Jahren mehr als die Hälfte gestorben ist, urtheile ich dann nicht: ein ganz junges Kind werde wahrscheinlich 19 Jahr alt werden? Sehe ich aber auch, daß von diesen 10000 neugebohrnen Kindern nach einem Jahre nur noch 7417, nach 2 Jahren 6760, nach 3 Jahren 6459 u. s. w. leben, und verfolge diese Beobachtung bis dahin, daß sie alle gestorben sind, so werde ich finden, daß ohngefehr eines davon 103 Jahr alt geworden ist. Die ersten 10000 Menschen leben also, weil jeder 1 Jahr lebt, zusammen 10000 Jahre; die Einjährigen 7417 noch jeder wieder 1 Jahr, also alle, 7417 Jahr; die Zweijährigen 6760 wieder noch ein Jahr, also zusammen 6760 Jahr;

 sehe

gen in seiner Schrift de redito annuo, præsertim vitalitio, zusammengefaßt lateinisch, H. Pr. Chassot de Florencourt aber in seinen Abhandlungen aus der politischen Rechenkunst, deutsch vorgetragen, und ihnen die Moivrische Probleme und Lambertischen Berechnungen annoch hinzugefügt.

Ich will mich daher mit Erklärung dieser Regeln hier nicht langwierig aufhalten, sondern sie aus vorgedachten Memoires also, wie Herr Euler daselbst S. 167 u. f. vorgetragen hat, hersetzen. Man verlangt nämlich

> das Einsatzgeld x für eine Leibrente r von 100 Thlr. zu finden, welches eine Person von gegebenen Alter m, z. B. von 52 Jahren, auf einmal zur Kasse bezahlen muß.

Die Auflösung hievon ist folgende:

1) Man zähle, wie viel Personen im gegebenen Alter von 52 Jahren auf der Mortalitätstabelle entweder

setzte ich dieses so fort, so müßte die Summe von allen diesen Lebensjahren, die Summe seyn, wie lange die 10000 Menschen insgesammt gelebt hätten. Diese Summe ist nun 294294 Jahre: dividirt man diese 294294 mit 10000, so findet man 29,4294 Jahre für die mittlere Lebensdauer eines Neugebohrnen; es wird aber für 29,4294, 29,27 Jahre angenommen, indem man noch ein halb Jahr abziehet, weil man die Sterbelisten von Jahr zu Jahr berechnet, und man doch annehmen kann, daß die eine Hälfte der Gestorbenen von jedem Alter in der ersten Hälfte des Jahrs gestorben ist.

weder des Ob. Consist. Raths Süsmilch in Göttl. Ordn. Th. II. §. 461, oder einer andern richtig verfaßten und tauglichen Mortalitätstabelle dermalen am Leben sind, z. B. in angenommenen Falle leben 560 zwei und funfzig jährige Personen (m)

2) Man setze, daß so viel Personen (m) von 52 Jahren sich Leibrenten kaufen wollen, und zähle auf der Mortalitätstabelle, wieviel davon in jedem Jahre bis zum höchsten Alter am Leben geblieben sind. Z. B. im ersten Jahre 549 = (m + 1), im zweiten Jahre 538 = (m + 2) im dritten Jahre 526 = m + 3) u. s. w. bis (m + n).

3) Nun soll jeder 52 jährige Rentenier auf einmal so viel Einsatzgeld zur Kasse zahlen, daß er und seine in jedem Jahre überbliebene Mitgenossen ihre Leibrenten bekommen können. Der 52 jährige Rentenier muß also bezahlen nach 1 Jahre (m + 1) r, nach 2 Jahren (m + 2) r und auf einmal für alle folgende Jahre zusammengenommen eine Summe = (m) r = (m + 1) r + (m + 2) r - - - - - + (m + n) r

4) Weil dieses Einsatzgeld Zinse und Zinseszinse, z. E. zu 5 Procent, oder $\frac{105}{100}$ oder $\frac{21}{20}$ tragen soll, so nenne man diese Zinseszinsen λ. Alsdenn wird der Ausdruck für (m) x seyn m x =

$$\frac{(m+1)\,r}{\lambda} + \frac{(m+2)\,r}{\lambda} + \frac{(m+3)\,r}{\lambda} \ldots \text{ ꝛc.}$$

Nun

100 Zahlen, die in der ersten Spalte Hunderte abwärts die Zahl in der Reihe auf, welche zu einer der ersten 100 Zahlen gehöret; so findet man das vielfache dieser Zahl, als so viel Einheiten, die erste Zahl der mit 0 überschriebenenen Spalte, oder die um 1 vermehrte Seitenzahl hat. Es ist klar, daß alle diese Produkte durch die Addition gefunden worden. Da nun die größte Seitenzahl 999 ist, und die größte Summe 900 + 100 oder 1000 beträgt: so ist das größte Produkt, welches diese Tafeln enthalten eine Million. Will man also mit Hülfe dieser Tafeln, z. B. 461,235,987 mit 789,654 multipliziren: so nimmt man die Theile des einen Faktors 461,000,000, 235,000, 987 und des andern 789,000, 684, und suchet auf 987 ⨯ 654; 235 ⨯ 654; 461 ⨯ 654 und dann 987 ⨯ 789; 235 ⨯ 789; 461 ⨯ 789 giebt diesen Produkten ihren Werth aus der Stelle und addirt sie: Das Exempel siehet daher also aus:

461235987		
789634		
645498 . .	654 ⨯ 987	auf der 653sten Kolumne.
153690 . . .	654 ⨯ 235	
301494	654 ⨯ 461	
778743	789 ⨯ 987	auf der 788sten Kolumne.
185415	789 ⨯ 235	
363729	789 ⨯ 461	
364216842078498		

Die

Dieses Hülfsmittel war also in trigonometrischen Berechnungen vor Erfindung der Logarithmen nicht zu verachten.

Ein Divisionsexempel siehet so aus:

235987) 186348078498 | 789654

addiret { 185415 . . . . . . zu 789 auf der 234 Kol.
778743 . . . . . 789 × 987

186193743

154335498 Rest

addiret { 153690 . . . . . zu 654 auf d. 234 Kol.
645498

154335498

0.

So viel von diesem ungeheuren Folianten, den man blos zur Kuriosität, und seiner Seltenheit wegen in einer mathematischen Büchersammlung aufbewahrt. *)

(Aus der Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniß 11. St. Bresl. 1779. Seite 417 und ferner.)

Die Anwendung der Rechenkunst in die Jurisprudenz und Politik hat seit kurzen eine beträchtliche Vervollkommung, durch die Arbeiten zweier Männer erhalten

*) Hierbei sparte man allerdings viel Rechnen, wohl aber keine Zeit. Wie groß ist also der Nutze der Logarithmen, die uns beides sparen! A. d. H.

ten, wovon jede in ihrer Art vortreflich kann genennet werden: ich meyne durch die Bemühungen eines Florencourt's und Michelsen's.* — Ersterer hat durch die Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst, von Carl Chassot de Florencourt. Nebst einer Vorrede des Herrn Hofrath Kästners. Mit einem Kupfer. Altenburg in der Richterischen Buchhandlung 1781. 292 Seiten in gr. 4. (Preis 1 Thlr. 8 ggr.) vermittelst der höhern Arithmetik alles das geleistet, was jeder in diesen Fächern wünschen kann. Schade ist's nur, daß noch zu wenige sind, die dieses vortrefliche Buch nutzen können; indem es zu viele der Studirenden entweder der Mühe nicht werth achten, oder nicht Zeit genug haben, sich eine Fertigkeit in der höhern Rechenkunst zu erwerben. Ueberdem sezt der Gebrauch dieses Buchs nicht geringe Kenntniß derselben voraus; und der durchdachte Plan desselben, der dem Herrn Verfasser Ehre macht, erfodert ein lebhaftes Erinnern des vorhin gelehrten, bey dem Nachfolgenden, und aller Lehrsätze der Algebra. Diese Schwierigkeit sah der Herr Hofrath Kästner, und sagt daher in der Vorrede, (Seite IIII.) „Wem die Rechnungen gar unverständlich, oder doch zu furchtbar sind, der wird wenigstens die Gründe derselben so auseinander gesetzt finden, daß er beurtheilen kann, ob er das Resultat einer nach diesen Gründen geführten Rechnung selbst richtig geführet.„

Ich

Ich versuche es hier, eine etwas umständliche Anzeige der in diesem Werke abgehandelten Materie den Lesern vorzulegen. Freilich werde ich nichts mehr als die wichtigsten Resultate sagen können; doch sollen sie Zusammenhang haben. — Zuerst aber den Inhalt des ganzen Werks. Es bestehet aus 7 Kapiteln, deren jedes wieder aus seinen Abschnitten bestehet. **Das erste Kapitel**: von der Zinsrechnung; Interusurium; mittlerer Zahlungstermine; veränderte Zahltermine; halbjährige Zahlungen; Paktum Antichretikum. **Das zweite Kapitel**: von der Wahrscheinlichkeit und ihrer Berechnung. **Das dritte Kapitel**: Politische Rechnungen über Bevölkerung, Sterblichkeits-Ordnungen ꝛc. **Das vierte Kapitel**: von Jahrrenten, Leibrenten, Tontinen. **Das fünfte Kapitel**: Witwen- und Waisen-Kassen. **Das sechste Kapitel**: Aussteurungs- Studier- und Todten-Kassen. **Das siebte Kapitel**: von der Berechnung der Legitima; der Falcidiä; der Verletzung über die Hälfte, Gesellschaftsrechnung nebst ihrer Anwendung; Remißionsrechnung bey Feldfrüchten, Proportionirung der Fässer, Begriffe von Assekuranzen, Brandkassen, Assekuranzen bey Feldfrüchten, Assekuranzen beym Viehsterben. Und dann noch 9 Tab. deren Inhalt wir in der Folge sehen werden.

Erstes Kapitel.

Zins und Zinseszinsen.

Die ersten vierzehn Paragraphen dieses Kapitels enthalten gleichsam eine Einleitung und die Gründe zu

den Berechnungen des ganzen Werks. Es betrachtet nemlich H. F. die Vermehrung und Verminderung einer Größe die er C nennet, allgemein, nach der Zeit und nach andern wesentlichen Zufälligkeiten. Ist der jährliche Wachsthum der Größe C in dem beständigen Verhältniß m : r und die jährliche Abnahme in den beständigen Verhältniß m : s, so ist die Verminderung der Größe C durch die Vermehrung $= C . \frac{r}{m}$ und durch die Verminderung $= C . \frac{s}{m}$; und folglich, weil diese Veränderungen einander entgegengesetzt sind, die ganze Aenderung der Größe $C = C . \frac{r}{m} - C . \frac{s}{m} = C . \left(\frac{r}{m} - \frac{s}{m}\right) = C . \left(\frac{r - s}{m}\right)$. Im Anfange des Jahrs war die veränderte Größe $= C$ und im Jahre hat sie sich um $C . \left(\frac{r - s}{m}\right)$ verändert, folglich ist ihr Zustand nach einem Jahre $= C + C . \left(\frac{r - s}{m}\right) = C . \left(1 + \frac{r - s}{m}\right) = \frac{C . (m + r - s)}{m}$. Ist P eben so verändert, so ist es nach 1 Jahre $= \frac{P . (m + r - s)}{m}$ Gesetzt P ist nun der Zustand von C nach einem Jahre, so ist er nach 2 Jahren $= C . \left(\frac{m + r - s}{m}\right)^2$. Setzt man P für diesen Zustand, und setzt diese Veränderung fort, so entstehet für sie nach 3 Jahren $= C . \left(\frac{m + r - s}{m}\right)^3$ u. s. w.

so,

so, daß sich der Exponent nach der Zahl der Jahre vergrößert. x sey der Zustand von C nach n Jahren, so folgt daß $x = C.\left(\frac{m+r-s}{m}\right)^n$ seyn müsse: und ist dies die erste Hauptformel, welche der H. V. auf diese Art herleitet. Er wendet darauf gleich die Berechnung der Volksmenge an, als wobei Wachsthum und Abnahme durchs Gebohrenwerden und Sterben entstehet. 10,000 jetzt Lebende vermehren sich darnach in 18,156 (nicht 18,151, welches im Buche vielleicht ein Druckfehler ist) wenn jährlich zu 250, 10 gebohren werden und davon 7 sterben. — Wenn x bekannt, so ist die Anzahl der Jahre, worin sich C zu x verändert

2.) $n = \frac{\text{Log. } x - \text{Log. } C}{\text{Log.}\left(\frac{m+r-s}{m}\right)}$; und soll x ein Vielfaches von C seyn, und p bezeichnet dies Vielfache, so ist

3.) $n = \frac{\text{Log. } p}{\text{Log.}\left(\frac{m+r-s}{m}\right)}$. Es ist ferner

4.) $r = m\left(\sqrt[n]{\frac{x}{C}} - 1\right) + s$ = dem jährlichen Zuwachse und

5.) $s = \left(1 - \sqrt[n]{\frac{x}{C}}\right)m + r$ = der jährlichen Abnahme. Hierauf betrachtet H. F. den Fall, daß die jährliche Abnahme beständig eine gewisse Größe = P sey: und alsdenn ist

$$6.)\ x = \left(\frac{m+r}{m}\right)^n C - \frac{\left(\frac{m+r}{m}\right)^n - 1}{\frac{m+r}{m} - 1} \cdot P,$$ wo

für mir aber folgende Formel, für den Fall, daß C und P nicht bloße einzelne Ordnungszahlen sind, bequemer deucht:

$$x = \frac{\left(C\left(\frac{m+r}{m} - 1\right) - P\right) \cdot \left(\frac{m+r}{m}\right)^n - P}{\frac{m+r}{m} - 1}$$

Wäre C der jetzige Waldbestand; P der jährliche Holzschlag; m : r das Verhältniß des Waldbestandes zum jährlichen Zuwachse, welches Verhältniß aus angestellten Erfahrungen abgeleitet werden muß, so zeigt hier x den Waldbestand nach n Jahren, und n Holzschlägen an. — Ein Wink wie Forstverständige die Arithmetik nutzen können.

Im Fall, daß bei der Größe C durchs Abnehmen keine Aenderung geschiehet, so ist

$$7.)\ x = \left(\frac{m+r}{m}\right)^n C,$$ weil $s = o$ ist. Den Fall eines alleinigen verhältnißmäßigen Abnehmens der Größe C, hat H. F. nicht erwähnt; aber die Formel ist auch gleich da, wenn man s statt r in voriger Formel setzet.

Mit dem 15. §. wendet nun der H. V. die letzte Formel auf die Zinseszinsen-Rechnungen an, und handelt in den folgenden 10 Paragraphen davon das Nöthige ab, jedoch aber ohne zuerst den Zinseszins eigentlich zu

er-

erklären, wenn nicht schon jene Gleichung als eine mathematische Erklärung desselben gelten soll. — Bedeutet nemlich die Größe C ein Kapital, so ist das Verhältniß m : r der Zinsfuß, und x die Summe auf welche das Kapital mit Zins und Zinseszinsen in n Jahren steigt: Gehet man zum Anfange dieses Kapitels zurück und wendet die Zinsen auf den Wachsthum der Größe C an, ohne an eine Abnahme zu denken, so wird man dies ganz richtig finden. „In diesem Falle, sagt der H. V. wäre es kürzer r = 1 zu setzen also $\frac{r}{m} = \frac{1}{m}$ welches anzeigt der wievielste Theil des Kapitals die Interessen sind, also $\frac{m+r}{m} = \frac{m+1}{m}$;" und ist richtig, aber nicht bei den Zinsfüßen, wo der Zähler kein Faktor von den Nenner wird, an bequemsten: doch kann man diese Unbequemlichkeit leicht abhelfen, und diesen Ausdruck behalten. Der Kürze halber setzt Er statt $\frac{m+1}{m} = \mu$; also daß auch $\frac{m}{m+1} = \frac{1}{\mu}$. Ist ein anderer Zinsfuß p : 1, so ist statt $\frac{p+1}{p} = \varrho$ und statt $\frac{p}{p+1} = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt — Ausdrücke, wovon die Folge erst die mehrste Anwendung hat und besonders zu merken sind. Weil nun $\frac{m+r}{m} = \frac{m+1}{m} = \mu$ so ist also die Formel für x auf 7.) $= \mu^n . C$. Setzt man diesen Ausdruck in Zahlen, so bekömmt man aus einen bekann-

kannten Kapitel ein anders mit den Zins und Zinseszins: und hiernach hat der H. V. die erste Tabelle berechnet, worin das Kapital zu 1000,000,000 angenommen, und dessen Größe auf 50 Jahre, zu 5, 4 und 3 pro Cent berechnet ist; welche Tabelle gewiß unter ihren Schwestern den Vorzug behält. Auch wird eine kurze Regel gezeigt, für den Fall, daß man die Größe des Kapitals auf mehr als 50 Jahre nach dieser Tabelle berechnen wollte. Auch sind die Logarithmen für die Ausdrücke μ und $\frac{1}{\mu}$, auf die Procente von 5 bis 2 von Halben zu Halben, hergesetzt, welche in der Zinseszins-Rechnung und überhaupt in der Folge mit Nutzen gebraucht werden.

Ich extrahire hier die 4 Hauptformeln für

8.) $n = \frac{\text{Log. } x - \text{Log. } C}{\text{Log. } \mu}$ und soll x ein viel-(f) faches von C seyn, so ist $n = \frac{\text{Log. } f}{\text{Log. } \mu}$

9.) $C = \frac{x}{\mu^n}$

10.) $\mu = \sqrt[n]{\frac{x}{C}} = \frac{m+1}{m} = 1 + \frac{1}{m}$

11.) $\frac{1}{m} = m : 1 = \sqrt[n]{\frac{x}{C}} - 1.$

Im 22 und 23sten §. rechtfertiget der H. V. diese Rechnung, und wiederlegt **Polack** und **Hoffmann**. — Die Gesetze haben Zinseszinsen verboten, so bald aber

aber die Ursache dieses Verbots aufhört, so bald des Schuldners Untergang dadurch nicht befördert wird: so hört auch das Verbot selbst auf: das Wechselrecht ist Beispiel davon. In gewissen Fällen gebieten die Gesetze die Zinseszinsen, wie bey Tutelen und Curatelen. Das Kapital des Pupillen, welches der Tutor in seine Handlung nimmt, muß am Ende der Administration mit Zinsen und Zinseszinsen bezahlt werden; und „diese Summe sagt H. F. giebt der an sich stumme arithmetische Buchstabe, als ein Kapital an, das in n Jahren so hoch angewachsen ist. Der Jurist nennt es die Summe verschiedener zum Theil aus den Zinsen entstandener Kapitale, welches endlich auf einen Wortstreit abläuft.„— Staaten geben in gewissen Fällen Zinseszinsen, da alsdenn eine Menge Gläubiger als ein einziger angesehen, und das Kapital mit Zinsen und Zinseszinsen in gewissen Jahren, gleichgültig ausbezahlet wird. Polack's Einwurf, Zinseszinsen zu berechnen, sey moralisch unmöglich, fällt bei Banken, Landeskassen rc. wo das Geld immer im Handel ist, ganz weg, und bei kleinen Kapitalien kommen Zinseszinsen nicht in Betracht. Hoffmann's Behauptung aber, die Zinseszinsen ließen sich, wenn sie monathlich oder ¼jährlich zum Kapital geschlagen würden, höher bringen, hebt die Gerechtsame des Interusurii, die der Schuldener, wenn er sich etwa zu einer solchen Bezahlung entschließen sollte, zu genießen hätte, wieder auf.

Am

Am Ende dieser Lehre giebt H. F. eine Formel durch die Differentialrechnung, für die Rechnung wenn die Zinsen von Augenblick zu Augenblick zum Kapitale geschlagen würden. Ich übergehe sie, da sie weiter keinen Nutzen hat, als den Liebling der Analysis zu belustigen. —

Interusurium oder Rabat.

Dieser ist der Abzug, welcher von den Gesetzen einem Schuldner, der erst nach einer gewissen Zeit zu zahlen schuldig ist, und jetzt zahlt, verwilligt wird; und ist also von den Zinsen darin unterschieden, daß diese der Gläubiger für den Gebrauch des Kapitals, und den Rabat der Schuldner fodert, weil er den Gebrauch nicht hat. Der Hauptgrundsatz bei allen Berechnungen des Rabats ist: daß der Gläubiger nicht durch den Schaden des Schuldners bevortheilt werde, und auch umgekehrt.

Ist C ein Kapital, das nach n Jahren bezahlt, unterdessen aber nach dem Verhältnisse $p:1$ verzinset werden soll, so beträgt C nach n Jahren, wenn die Zinsen nicht bezahlt werden $\left(\frac{p+1}{p}\right)^n . C = \varrho^n . C$. Ist y das Kapital, das ich jezt gleich bezahlen, aber zu dem Zinsfuß $m:1$ nutzen könnte, so beträgt dies y mit den Nutzen nach n Jahren $\left(\frac{m+1}{m}\right)^n . y = \mu^n . y$. Nach jenem Grundsatze muß also $\mu^n . y = \varrho^n . C$ seyn; folglich ist

12.)

12.) $y = \frac{\varrho^n . C}{\mu^n}$ der jetzige Werth des Kapitals C das nach n Jahren erst zahlbar ist, das Kapital, das der Gläubiger jetzt vom Schuldener bekommen muß, nach abgezogenen Rabat. Dieser also ist $C - y$, und obige Formel die Hauptformel der Rabatrechnung.

Der gewöhnlichste Fall, worin sich der Schuldner befindet, ist, daß er sein jetzt zu früh bezahlendes Kapital nicht zu verzinsen braucht, oder den usum gratuitum hat. In diesem Fall ist $p = o$ und also

$$13.)\ y = \frac{C}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n} = \frac{C}{\mu^n}$$

Nach dieser Formel hat der H. V. die zweite Tabelle berechnet, worin man findet: wie viel man jetzt zahlen muß, um 100 Rthlr. die nach einen bis auf 100 Jahre fällig sind, und zu 5, 4, und 3 Procenten können genutzt werden.

Im 32. §. wird gezeigt, wie der Herr von Leibnitz auf diese Formel gekommen ist.

Den Rabat muß der Schuldner (nach obigen Grundsatze) eben so hoch bringen können, als den Nutzen, den er von dem Kapital hat. Ist er nicht in dem unentgeldlichen Gebrauche des Kapitals, sondern muß es nach p : 1 verzinsen, so ist der Nutzen $= \mu^n . C - \varrho^n C = (\mu^n - \varrho^n) . C$ von dem Kapital C in n Jahren: und diesem Nutzen muß der Rabat

hat $= R$ in n Jahren zu $m : 1$ gleich werden. Es ist also
$\mu^n R = (\mu^n - \varrho^n) C =$

14.) $R = \frac{\mu^n - \varrho^n C}{\mu^n}$. Hat der Schuldner den unentgeldlichen Gebrauch des Kapitals, so ist $p = 0$ als $\varrho = 1$ und

15.) $R = \left(1 - \frac{1}{\mu^n}\right) C$. Auf diese Art hat der H. V. diese Formeln gefunden: ist aber wenn ich
$R = C - y = C - \frac{\varrho^n . C}{\mu^n} = \frac{(\mu^n - \varrho^n C}{\mu^n}$;

und für $p = 0$, $= \left(1 - \frac{1}{\mu^n}\right) C$ setze, diese Entwicklung nicht leichter?

Von 36. bis zum 41. §. betrachtet H. F. den Fall: wenn der Schuldner verbunden wäre, seine Schuld Terminsweise abzutragen, wie viel er dann jetzt zahlen müsse.

Ist die Zeit zwischen jedem Termine $= t$
die Anzahl aller Termine $= n$; ferner
verlaufen vor dem Anfange des ersten Termins eine
Anzahl $= q$ Jahre, so
geschiehet die erste Zahlung nach $q + t$ Jahren, und
also die letzte am Ende des $q + nt$ Jahrs.

Ist $S =$ der in jedem Termine zu zahlenden Summe so entstehet für

15.)

15.) y die Formel $\frac{(\mu^{nt} - \varrho^{nt})\varrho^{q+t}}{(\mu^{t} - \varrho^{t})\mu^{q+nt}} \cdot S$;

wobei angenommen ist, daß der Schuldner bei Abtrags eines jeden Termins, die Summe aller Zinsen von dem noch nicht bezahlten Theile des Kapitals auch bezahle.

Ist $t = 1$ so sind es jährliche Termine; ist $q = 0$ so wird der erste Termin gleich am Ende des ersten Jahres bezahlt. Hiernach ist

$$16.)\ y = \frac{(\mu^{nt} - 1) \cdot S}{(\mu^{t} - 1) \cdot \mu^{nt}}$$ wenn auch $p = 0$ ist,

y zeigt also auch an, wie viel jetzt erlegt werden muß, um gewisse Termine hindurch, bey jedem S zu bekommen. Hiernach hat der H. V. die dritte Tabelle berechnet, worin man sehen kann, wie viel man jetzt geben muß, um von 1 bis 100 Jahre hindurch, jährlich 100 Thaler zu bekommen, wenn das Kapital zu 5, 4, oder 3 Procent genutzt werden kann; auch eine Formel gegeben, um aus der Tabelle selbst, dieselbe über 100 Jahr zu vergrössern.

Für den Fall, daß der erste Termin am Ende des q^{ten}, und der letzte am Ende des $q + nt$ Jahres bezahlt wird, so ist

$$17.)\ y = \frac{(\mu^{nt+t} - \varrho^{nt+t})q^{t}}{(\mu - \varrho^{t})\mu^{q+nt}} \cdot S;$$ wenn

alles so bleibt wie in der 15. Formel. Ist aber $q = 0 = p$, und $t = 1$ so ist

18.)

$$18.)\ y = \frac{\mu^{n+1} - 1}{(\mu - 1)\mu^n}$$

Der 42ste §. zeigt 3 wichtige Rechtsfragen, deren Auflösung auf die Berechnung des Interusurii gegründet sind.

In den 4 folgenden §. wendet H. Fl. diese Rechnung auf die Konkurse an, und bestimmt daraus eine Abfindung aller Gläubiger, wovon jeder mit mir wünschen wird, daß man sie allgemein beherzige. Ich will den ganzen 42. §. ausschreiben, um diesen Vorschlag denjenigen, die das Buch nicht besitzen verständlich zu machen. — „Da bey Konkursen die massa bonorum kleiner, als die Summe der Schulden ist, so ist es offenbar, daß die Gläubiger keine Zinsen bekommen. Die Schulden werden nach der Priorität getilget, so daß die letzten Gläubiger oft nichts bekommen. Könnte man dieses Recht nicht am bequemsten und billigsten so ausüben, daß man die Masse der Güter, als den jetzigen Werth einer Rente ansieht, die n Jahre hintereinander ausbezahlt werden soll, so daß die ältern Gläubiger zuerst, die jüngern zuletzt, alle aber mit der Zeit ihr Kapital erhalten. Z. B. A macht Konkurs; die Masse der Güter ist = 773 Thlr. die Summe der Schulden = 1000 Thlr. Hieran hat zu fodern B 200 Thlr. C 250 Thlr. D 350 Thlr. E 200 Thlr. und genießen auch nach dieser Ordnung, das Prioritätsrecht; so erhellet (aus 16.) daß 773 Thlr. der jetzige Werth einer Rente von 100 Thlr. auf 10 Jahren ist; folglich werden

nach

nach Jahren	die Gläubiger	bekom. Thlr.	Ist jetzt werth	Könnten also jetzt bekommen
1	B	100	95,23809 Thl.	B; 185,94099 Th.
2	B	100	90,70290 =	
3	C	100	86,38375 =	C; 207,83035 Th.
4	C	100	82,27030 =	
5	C u. D	jed. 50	39,17630 =	
6	D	100	74,62150 =	D; 252,54985 Th.
7	D	100	71,06812 =	
8	D	100	67,68393 =	
9	E	100	64,46090 =	E; 125,85220 Th.
10	E	100	61,39130 =	
			Summe	773 Thlr.

Die Gläubiger können also nach H. F. Vorschlag mit der vorhandenen Gütermasse jetzt ganz abgefunden werden, und jeder bekäme nach den Jahren, welche ihm das Prioritätsrecht zuwege bringet, sein zufoderndes Kapital ganz. Der H. V. zeigt auch die allgemeine Rechnung darüber, und den bequemen Gebrauch der 3ten Tabelle zu Auflösung dieser Aufgabe. Ich würde wider die Absicht zu weitläuftig werden, wenn ich hiervon alles sagen wollte. —

Der 47. §. betrachtet die Berechnung des Porto's, so bei der Uebermachung des jährlichen Ueberschusses bei Verwaltung herrschaftlicher Güter: eine Betrachtung, worüber Unger *) eine eigene Abhandlung geschrieben. Hier=

*) In seinen Beiträgen zur Mathesi forensi 2te Abhandl.

Hierauf trägt H. Fl. die Hofmannsche Rabattregel vor; zeigt ihre Gründe, ihren Schaden für den Schuldner, und wendet sie auf den Fall an, daß der Schuldner verbunden wäre, seine Schuld terminsweise abzutragen.

Hofmann giebt für y die Formel $\frac{m\,C}{m+n}$, welche er vermuthlich so hergeleitet hat: „Wenn der Schuldner n Jahre hindurch, vom Kapital C, jährlich $\frac{C}{m}$ Zinsen bekömmt; so beträgt die Summe hievon eben so viel, als wenn ihm das Kapital C, nur ein Jahr hindurch, nach dem Zinsfuße m : n verzinset würde; er bekömmt dann $\frac{n\,C}{m}$. Der Gläubiger muß sich also auch jetzt so viel abziehen lassen, daß der Schuldner den Abzug in einem Jahre, nach dem Zinsfuße m : n auf $\frac{n\,C}{m}$ bringen kann; woraus die Formel entstehet."

Vermuthlich aber hat Hofmann sie auch so hergeleitet: der Schuldner der nach n Jahren das Kapital C zu zahlen schuldig, muß jetzt dem Gläubiger so viel geben, daß dieser dies mit den (einfachen) Zinsen in n Jahren zu C bringe: nemlich, die Zinsen von y in n Jahren sind $= \frac{n\,y}{m}$ folglich muß $\frac{n\,y}{m} +$ $y = \left(\frac{n+m}{m}\right) y = C$ seyn woraus $y = \frac{m\,C}{m+n}$ entstehet. Mir scheinet wenigstens diese Schlußfolge und die Entwicklung leichter, wie die vorige.

Um

Um die Bevortheilung auf Seiten des Schuldners bei dieser Rechnung deutlich zu machen, setzt der H. V. den Fall, daß Gläubiger und Schuldner, beide zu gleicher Zeit Pupillen würden, beider Vormünder das Geld aber in der Handlung so nutzen können, daß sie die Zinsen davon, von neuen zum Handlen anlegen, u. s. w. Der Schuldner hätte nach 10 Jahren 1000 Thlr. an den Gläubiger zu zahlen, der Vormund des erstern zahlt sie jetzt, nach Hofmanns Rechnung, mit 666,666 . . . Thlr. und behält also 333,3333 . . . Thlr Rabat zurück. Nach jener Voraussetzung müßte der Vormund des Gläubigers nach den 10 Jahlen demselben 1000 Thlr. zahlen; es giebt aber $(\frac{21}{20})^{10}$ 666,666 . . . Thlr. 1085,3 Thlr. also 85,3 Thlr. für dem Gläubiger zu viel.

Der Vormund des Schuldners müßte ordentlicher Weise 628,894 Thlr. zahlen, wird aber nur 592,98 . . . Thlr. zahlen können, also 35,91 . . . Thlr. zu wenig.

„Der Gläubiger wird also zum Schaden des Schuldner bevortheilt, welches gegen das ausdrückliche Gesetz ist. Hofmanns Rechnung kann nur erst dann richtig seyn, wenn es unmöglich gemacht worden ist, daß man Zinseszinsen heben, oder die Zinsen als ein neues Kapital austhun kann, das heißt, wenn der Geldhandel ganz unterdrückt ist.“

„Er

„Er besteht auch mit seiner eigener Widerlegung nicht. Er nimmt an, wie es geschehen muß, daß die, von dem in vorausbezahlten Kapitale, fallenden Zinsen, als **ein Theil des Kapitals** müssen angesehen werden. Da dieser nun früher bezahlt wird, als es der Schuldner schuldig ist; so ist offenbar, daß er ihm wieder muß verzinset werden. **Diesen Theil läßt Hofmann dem Gläubiger ohne daß er ihn verzinset.**" — Ist aber nicht zu bewundern, daß ohngeachtet dieser Bevortheilung, Hofmanns Regel so oft in Gerichten befolgt wird? Woher sonst der Name **gemeine Regel?**

Dieser Allgebrauch bewog gewiß den H. V. nach dieser Regeln auch den Fall der Terminweisen Abtragung eines Kapitals (der Fall der bey den Formeln 15 bis 18 betrachtet wurde) abzuhandeln. Sind es jährliche Termine; hat der Schuldner den unentgeldlichen Gebrauch des Kapitals, und ist der erste Termin am Ende des ersten Jahrs, so findet folgende Formel statt:

$$19.\quad y = \frac{(n+2m-1)nS}{2(m+n)}.$$

Michelsen *) wirft dieser Regel die Unrichtigkeit vor: sie ist aber auf Hofmanns Grundsätze gebauet, richtig; jene Unrichtigkeit trift also nicht die Regel, sondern die Gründe woraus sie gefolgert ist; und die Unrichtigkeit dieser, selbst bei einfachen Zinsen, hat ja H. Flo-

*) In dem ersten Theile seiner Anleitung zur juristischen, politischen und ökonom. Rechenkunst (Halle 1782) §. 161.

Florencourt selbst gesagt: "Hofmann nimmt an, daß die, von dem vorausgezahlten Kapitale, fallende Zinsen, als ein Theil des Kapitals müssen angesehen werden; aber diesen Theil läßt er den Gläubiger, ohne daß er ihn verzinset:„ dies sind seine Worte.

Die Rabatrechnung nach einfachen Zinsen, und auf das Hauptgrundgesetz gegründet, hat den H. V. so wie die einfache Zinsrechnung, nicht beliebt vorzutragen: zwei Dinge die der Leser mit Recht vermissen wird.

Mitlerer Zahlungstermin.

Der Schuldner trägt seine Termine nicht ab, sondern nutzet das ganze C so lange, bis er so viel Nutzen davon gezogen hat, daß er diesen mit Zins und Zinseszins bis am Ende gewisser Jahre eben so hoch bringen kann, als den Nutzen, den er von den einzelnen Summen hätte ziehen können; dann bezahlt er das ganze C an den Gläubiger. Dieser muß nun bis an die Zeit, da der letzte Termin hätte bezahlt werden müssen, noch eben so viel Nutzen davon ziehen können, als er von den einzelnen Terminen würde gezogen haben. Es wird die Zeit gesucht, wie lange der Schuldner das ganze Kapital nutzen darf.

Diese Erklärung der **mitlern Zahlungstermine** zeigt zugleich deutlich die Verfahrungsart zu Findung dieses Termins an: nemlich, man sucht

1) den Nutzen den der Schuldner überhaupt bei terminweiser Zahlung haben kann;

2) den Nutzen den ihm das ganze Kapital C bis an den Zahlungstermin, nemlich in z Jahren gewährt;
3) weil er letzteren Nutzen, in n — z, d. i. in den Jahren vom mitlern bis zum eigentlichen Zahlungstermin, der bei Terminen statt fand, so hoch bringen muß, als den durch (1) gefundenen Nutzen, und müssen diese beiden Nutzsummen verglichen werden.

So hat denn auch der H. V. verfahren, und Er findet für z

$$20.)\ \frac{\text{Log. } Q}{\text{Log. } \frac{1}{\mu}} \text{ worin } Q = \frac{(\mu^n - 1) S}{\mu^n (\mu - 1) C} \text{ ist, und}$$

wenn es jährliche Termine sind, der erste Termin am Ende des ersten Jahrs fällig, und der Schuldner im unentgeldlichen Gebrauche des Kapitals ist; und diese Fälle sind die häufigsten.

Für eben diese Fälle bei einfachen Zinsen ist

$$21.)\ z = \frac{n+1}{1};$$

eine sehr leichte Formel.

z nach dem Nutzen des Gläubigers berechnet, giebt eben diese Formeln.

Veränderte Zahlungstermine

Der Herr Verfasser erkläret diese Art Zahlungstermine mit einen allgemeinen Fall. Er sagt: „Gesetzt, der Schuldner soll nach q Jahren, alle t Jahre, nt hintereinander (es sind also n Termine,) dem Gläubiger

ger die Summe S zahlen; sie werden eins, daß er nach φ Jahren diese Schuld in gleichen Terminen in $\nu\tau$ Jahren, (es sind also ν Termine,) alle τ Jahre abtragen, und sie inzwischen verzinsen soll. Dieses nenne ich **veränderte Zahlungstermine.**

Es entsteht also die Frage: wie viel ist der jedesmalige Abtrag, bei dem veränderten Termine?

Er sey χ, und der jetzige Werth aller auszuzahlenden S ist $y = N$. Das Resultat muß aus den beiden jetzigen Werthen von S und χ bestimmet werden, und dies ist nach der Formel 15. leicht, wenn man φ statt q, τ statt t, χ statt S, ν statt n setzt. Nemlich es ist

$$22.\ \chi = \frac{(\mu^{\tau} - \varrho^{\tau})\mu^{\varphi + \nu\tau} . (\mu^{nt} - \varrho^{nt})\varrho^{q+t}}{(\mu^{t} - \varrho^{t})\mu^{q+nt} . (\mu^{\nu\tau} - \varrho^{\nu\tau})\varrho^{\varphi+\tau}} . S.$$

Für den Fall, daß überhaupt keine Verzinsung statt findet, und $q = 0 = p = \varphi$ und $t = 1$ ist, so entstehet für

$$23.)\ \chi \text{ die Formel } \frac{(\mu^{\tau} - 1)\mu^{\nu\tau} . (\mu^{n} - 1)}{(\mu^{\nu\tau} - 1)\mu^{n} . (\mu - 1)} . S.$$

Wird diese Frage nach einfachen Zinsen beantwortet, so wird man nach einiger Vergleichung der Formel 19 finden, daß das jetzige χ jenen y gleich sey, und die Formel für den jetzigen Fall, wenn keine Verzinsung statt findet und $t = 1$ folgende sey

$$24.)\ \chi = \frac{(m + \nu\tau)(2m + n - 1)n}{(m + n)(2m + \nu\tau - \tau)\nu} . S.$$

H. F. beweiset §. 72. 76-78 daß χ so gefunden, indem beide Größen auf den jetzigen Werth gebracht wor-

worden; und stellt einige Betrachtungen über den Fall an, daß $q + nt$ größer oder kleiner als $\varphi + \nu\tau$ sey; welche sich in Auszug bringen lassen.

Im 82 §. wird der Fall betrachtet, wenn der Schuldener nur verpflichtet ist, ein für allemal, nach n Jahren dem Gläubiger die Summe C zu zahlen, und sie vergleichen sich darüber, C Terminweise abzutragen; so ist

$$25.)\quad x = \frac{(\mu^{\tau} - 1)\,\mu^{\varphi + \nu\tau}}{(\mu^{\nu\tau} - 1)\,\mu^{n}} . C \text{ wenn } p = 0.$$

Ist der erste Termin gleich nach φ Jahren fällig, so ist

$$26.)\quad x = \frac{(\mu^{nt+t} - \varrho^{nt+t})\,\varrho^{q}.(\mu^{\tau} - \varrho^{\tau})\,\mu^{\varphi - \nu\tau}}{(\mu^{\nu\tau + \tau} - \varrho^{\nu\tau + \tau})\,\varrho^{\varphi}(\mu^{t} - \varrho^{t})\,\mu^{p+nt}} . S,$$

eine Formel, welche aus 22.) entstehet, wenn solche nach 17. verändert wird, welches geschehen muß.

Von §. 88 bis 95 betrachtet der H. V. den wichtigen Fall, wenn außer dem Kapitale C, welches der Schuldner dem Gläubiger, nach dem Fuße p : 1, verzinset, dieser noch alle t Jahre, nt Jahre hindurch, die Summe B zuschießet, die eben so soll verzinset werden. Nach nt Jahren soll der Schuldner die Schulden in ν gleichen Terminen, deren jeder von dem nächsten τ Jahre absteht, abtragen: Wie groß der jedesmahlige Abtrag $= x$. Das Kapital C steigt in nt Jahren, auf ϱ^{nt} C (nach 7.) und B beträgt in nt Jahren mit den Zinsen $\frac{\varrho^{nt} - 1}{\varrho^{t} - 1}$. B, als die Summe einer geome-

tri-

trischen Progreßion, wovon das erste Glied $B\,\varrho^{(n-1)t}$ und das letzte $B \cdot 1$ ist. Die ganze Schuld ist also

$$= \varrho^{nt}\,C + \frac{\varrho^{nt} - 1}{\varrho^{t} - 1}.\,B$$

welche in $\nu\tau$ Jahren abgetragen werden sollen. Setzt man hier

	χ	ϱ	1	0	ν	τ
statt	S	μ	ϱ	q	n	t

in der 15. und 16. Formel, so entstehet für den jetzigen Werth aller Abträge $\frac{(\varrho^{\nu\tau} - 1)\,\chi}{(\varrho^{\tau} - 1)\,\varrho^{\nu\tau}}$ welches der ganzen Schuld gleich seyn muß; woraus denn folget, daß

$$27.)\ \chi = \left(\varrho^{nt}\,C + \frac{\varrho^{nt} - 1}{\varrho^{t} - 1}\,B\right)\frac{\varrho^{\nu\tau}\,(\varrho^{\tau} - 1)}{\varrho^{\nu\tau} - 1}$$

der jedesmahlige Abtrag.

Nun setzt der H. V. die Formeln für B, C, und nt, oder für dem Zuschuß, dem Kapitale und den Jahren, welche der Gläubiger warten muß, ehe er gewisse Jahre hindurch von dem bezahlten Kapitale C und den Beiträgen eine bestimmte Einnahme haben kann. Weil sie für die Zukunft wichtig sind, so hat man sie hierher gesetzt.

$$28.)\ B = \frac{\left((\varrho^{\nu\tau} - 1)\,\chi - \varrho^{nt + \nu\tau}(\varrho^{\tau} - 1)\,C\right)(\varrho^{t} - 1)}{(\varrho^{\tau} - 1)(\varrho^{nt} - 1)\,\varrho^{\nu\tau}}$$

$$29.)\ C = \left(\frac{(\varrho^{\tau} - 1)\,\chi}{(\varrho^{\nu\tau} - 1)\,\varrho^{\nu\tau}} - \frac{\varrho^{nt} - 1}{\varrho^{t} - 1}\,B\right)\frac{1}{\varrho^{nt}}$$

 30.)

$$30.)\ \varrho^{nt} = \frac{(\varrho^t - 1)(\varrho^{\nu\tau} - 1)\chi + (\varrho^\tau - 1)\varrho^{\nu\tau}B}{(\varrho^\tau - 1)\varrho^{\nu\tau}((\varrho^t - 1)(C+B)} = A$$

$$\text{also } nt = \frac{\text{Log. } A}{\text{Log. } \varrho}$$

Will der Gläubiger keine Beiträge geben, sondern die fehlende Summe, am Ende der nt Jahre, auf einmal nachschießen, um die Einnahme bekommen zu können, so ist N dieser Nachschuß

$$31.) = \frac{(\varrho^{\nu\tau} - 1)\chi}{(\varrho^\tau - 1)\varrho^{\nu\tau}} - \varrho^{nt} C$$

Halbjährige, vierteljährige ꝛc. Zahltermine.

Wenn ein Schuldener von 100 Thlr. jährlich Zinsen zu geben hat, so wird er sich Schaden thun, das erste halbe Jahr 2,5 und am Ende des Jahrs wiederum 2,5 Thlr. Zinse giebt. Bei den ersten 2,5 Thlr. verliehrt er den Rabat für zu frühe Zahlung. Dies ist bei kleinen Summen nicht merklich, bei großen aber beträchtlich.

Die Reihe der Vermehrung eines Kapital ist geometrisch, deren Exponenten der Anzahl Jahre immer gleich ist.

Theilt man jedes Jahr in t Theile, so lassen sich zwischen jede zwei auf einander folgende Glieder auch t mittlere geometrische Proportionalzahlen finden, welche den Zustand der Vermehrung in den Jahrtheilen darstellen. Das Kapital mit den Zinsen und Zinseszinsen ist nach q Jahren $= \mu^q . C$ nach $q + 1$ Jahren =

$= \mu^{q} \ 1 \ C$; also für eine jede Menge n von darzwischen fallenden Zeittheilen $= \mu^{q + \frac{n}{t}} . C$, und der wahre Nutze

$$32.)\ = \left(\mu^{q + \frac{n}{t}} - 1\right) C.$$

Hiernach betragen die halbjährigen Zinsen von 100,000 die sonst zu 2500 angegeben werden, 2469,476 Thlr.

Nun betrachtet H. F. den Fall, daß der Schuldner verpflichtet ist, alle Jahre, n Jahre hintereinander die Summe S zu erlegen; der Gläubiger aber verlange dagegen, eben die Zeit durch eine Einnahme alle $\frac{1}{t}$ vom Jahre: wie groß diese Einnahme seyn müsse in folgenden Umständen:

1) daß der Gläubiger keine große Summe leihet: und dann kann sie nicht $\frac{1}{t}S$ seyn. Sie sey R; so ist der jetzige Werth aller $R = \frac{R}{\mu^{\frac{1}{t}}} + \frac{R}{\mu^{\frac{2}{t}}} \dots \dots \frac{R}{\mu^{n}}$, dies giebt (nach der 15. Formel.)

$$33.)\ R = \frac{\left(\mu^{\frac{1}{t}} - 1\right)}{\mu - 1} . S.$$

2) daß der Gläubiger jetzt so viel Geld nachschießen will, um daß immer $\frac{1}{t}S$ seine Einnahme sey. Nun ist die Frage, wie viel der Nachschuß ist? Er

Er ist

$$34.) = \left(\frac{1}{t(\mu^{\frac{1}{t}} -- 1} -- \frac{1}{\mu -- 1}\right)\frac{\mu^n -- 1}{\mu^n}.S$$

3) daß der Gläubiger nicht nachschießen, und doch alle t Zeiten $\frac{S}{t}$ einnehmen will. Dann ist offenbar, daß er die Einnahme weniger Jahre geniessen könne. Wie viel Jahre wird dieses betragen? Setzt man in die Reihe, welche die 33. Formel bestimmet, statt R, $\frac{S}{t}$ und statt n, q so entstehet

$$35.) q = \frac{\text{Log.} S -- \text{Log.} t\left(\frac{S}{t} + (1 -- \mu^{\frac{1}{t}})N\right)}{\text{Log.}\ \mu}$$

worin N der jetzige Werth aller dem Gläubiger zukommenden jährlichen Einnahmen S.

Bei einfachen Zinsen fällt diese ganze Rechnung weg, denn diese wachsen in arithmetischer Progreßion.

Antichretischer Vertrag.

Dieser ist dann vorhanden, wenn der Schuldner dem Gläubiger, eine nutzbare Sache, auf eine gewisse Zeit übergiebt, sie gehörig zu nützen, damit der Gläubiger, wegen des Verlustes am Nutzen seines Kapitals, den der Schuldner zieht, entschädigt werde. Trägt sie mehr ein, als der Gläubiger für seinen Verlust fodern darf, so muß er dem Ueberschuß vom Kapitale abziehen, oder ihn dem Schuldner zustellen. Ist C das verliehene Kapital, S der jährliche Ertrag des Pfandes, und p die

Zeit

Zeit, wie lange es der Gläubiger nützt; so ist die Frage: wer einer dem andern was heraus giebt, und wie viel? Dies letzte wird mit M bezeichnet, und

$$36.)\ M \text{ ist} = \mu^n C - \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} S,$$

welches entstehet, wenn man den jetzigen Werth des Ertrags der Sache von dem Werthe des Kapitals abzieht. Wird dann M positiv, so bekommt es der Gläubiger, ist es negativ, so bekommt es der Schuldner.

Nun betrachtet der H. V. die drei Fälle, so sich denken lassen, nemlich daß der Ertrag der Sache den Zinsen des Kapitals gleich, oder kleiner, oder grösser seyn können. — Es muß immer der Ertrag größer seyn, als die Zinsen.

Ist die Sache ein Gut, so muß der mittlere Durchschnitt der Erträge mehrerer Jahre, den jährlichen Ertrag bestimmen.

Soll für eine bestimmte Anzahl Jahre, S so bestimmt werden, daß keiner Etwas herausbekömmt, so ist M = o, folglich

$$37.)\ S = \frac{(\mu - 1)\,\mu^n C}{\mu^n - 1}$$

welches auch die Grösse der jährlichen Einnahme, n Jahre hinter einander, für ein jetzt bezahltes Kapital anzeigt. Ist S bestimmt, und man will die Jahre in diesen Fall darnach bestimmen, so ist

38.)

$$38.)\ n = \frac{\text{Log. } S - \text{Log. } (S - (\mu - 1) C}{\text{Log. } \mu}$$

welches auch anzeiget, wie lange man die jährliche Einnahme S von dem jetzt erlegten Kapital geniessen kann.

Darauf zeigt der H. V. wie diese Rechnung angewandt werden kann, wenn die Sache aus Grundstücken bestehet; und führt dann die Grundsätze einiger Juristen an, über die Rechtmäßigkeit, diese Rechnung durch Zinseszinsen zuführen; widerlegt Polack, welcher behauptet daß der Gläubiger bey der ganzen Rechnung Schaden leiden, und giebt am Ende dieses Kapitels die Formel 36, nach Hofmanns Manier eingerichtet nemlich

$M = \frac{m+n}{m} C - \frac{2m+n-1}{2m} . n S$ welche weniger fehlerhaft ist, als Polack's Formel, wornach

$M = \frac{m+n}{m} C - n S$ ist

wobei der Schuldner einen sehr beträchtlichen Schaden leidet.

(Die Fortsetzung künftig.)



Raphael Levi Rechnungs-Methode herausgegeben von Meyer Aaron, mit einer Abhandlung über die vier Species des Rechnens mit Brüchen. Hannover gedruckt

bei

bei H. M. Pockwitz. 1783. in 8. 1 Titelblat, 3 Blätter Verzeichniß der Pränumeranten und 200 Seiten das Werk. (Preis 14 Ggr.)

Der Name der oben auf dem Titel pranget, hat das Publicum auf dieses Werk aufmerksam gemacht, und es ist zu bedauren daß es dennoch seiner Erwartung nicht entsprechen wird. Der praktische Rechner würde es Herr Meyer Aaron dank wissen, wenn er ihm ein Buch in die Hände gegeben, woraus er nach sichern Regeln eine bessere, kürzere und leichtere Rechnungs-Methode erlernen könnte: aber des Dankes wird — wenig seyn.

Herr **Meyer Aaron** ist weiter nichts als **Herausgeber** in eigentlichsten Verstande: nemlich, daß er weiter keinen Antheil am Werke selbst hat, (wenn man die Berechnung einiger Exempel abrechnet,) als daß er die Herausgabe veranstaltet, oder noch beßer, den Namen dazu hergegeben. Daß Er es geschrieben, wie man glauben sollte, und glaubt, ist falsch, denn es ist hier bekannt, daß die zwei ersten Abschnitte von einen Candidaten der Theologie **zusammengetragen** (denn **verfaßet**, ist das nicht zu viel gesagt?) der dritte aber ganz von dem Herrn Cammersecretair **Grote** verfasset worden ist; und Rezensent ist überzeugt, daß selbst Aufgaben dieses Buchs jenseits der Rechnungssphäre des H. M. A. zu Hause gehören. Aus einer Handschrift welche der genannte H. Herausgeber, über die Raphaelsche

sche Methode hatte, so ohngefehr bis zwei gedruckte Bogen ausgemacht hätte, entstanden durchs zusammentragen $10\frac{1}{2}$ Bogen, welche außer Exempeln nicht viel mehr enthalten, als jene Handschrift. — Das war die Geschichte des Buchs, und wie H. M. A. Arithmetikus ward — nun das Buch selbst. —

Zuerst (S. 1 — 5.) die **Einleitung**. Hier wird nun zuerst gesagt, daß es immer Schwierigkeiten gefunden, Aufgaben von vermischten Grössen in einem Aufsatze nach der Kettenregel aufzulösen.

> Das ist wahr; aber wenn's nun die Reesische Regel kann, so wäre doch Raphael's Methode nicht die erste: und die Resische Regel kann es, nur da nicht, wo die Größen durch eine Addition und Subtraction in Verbindung stehen.

Raphael Levi, der als Schüler eines Leibnitz zu **bekannt ist**, (daran zweifle ich, denn wie können es Auswärtige wissen, als aus den Lebensbeschreibungen von Leibnitz? und diese sagen doch von einen Schüler Raphael Levi nichts,) erfand kurz vor seinen Ende eine Methode, solche Aufgaben in einem Aufsatze, auf eine **leichtere** und **kurze** Art, zu berechnen. Sein Tod und verschiedene andere Betrachtungen hielten ihn ab, sie bekannt zu machen.

> Es ist zu bedauren, daß diese andere Betrachtungen, worunter gewiß die gehört, daß Er der deutschen Sprache nicht mächtig war, Raphael Levi oft ab-

abgehalten, mehr seiner mathematischen Bemühungen bekannt zu machen.

Nun sagt H. Meyer Aaron: „Ich glaube, daß ich dem Publiko einen Dienst thun werde, wenn ich in diesen Blättern das thue, was er (Raphael) immer thun wollte:“ und erzählt darauf, was jeder der 3 Abschnitte enthalten soll. Hierauf wird erklärt, was Rechnungsaufgaben von vermischten Größen sind, worin der H. Verfasser der zwei ersten Abschnitte den ganzen Werth der Methode scheint gelegt zu haben. Rees allgemeine Regel und die Kettenregel aus N. Schmid's Rechenkunst wird von dem Lesern vorausgesetzt; und nun gesagt: „daß auch bei dieser Methode, vermischte Größen zu berechnen, der Name der Multiplikations-Kolumne in die folgende Reihe der Divisions-Kolumne wiederholt, und die Multiplikations-Kolumne nicht anders als mit dem Namen der Frage der Divisions-Kolumne am Ende schließen muß“ — also so wie bei der Kettenregel.

Das **besondere** bei dieser Art, **soll seyn**, daß man die in der Aufgabe enthaltenen verschiedenen Größen nachdem der Werth einer jeden durch die Multiplikation, in eins gebracht, so wie es die Aufgabe erfordert entweder die **Addition mit einander verbindet** oder durch die **Subtraktion vergleicht**, (**vergleicht**? dieser Ausdruck ist zu unbestimmt) und von **einander trent**, und hierdurch den Dividuum in einer Summe erhält. — Wenn ich nach den bekanntsten Arten verfahre,

fahre, erhalte ich da auch nicht den Divident in einer Summe? Mir deuchts.

Nun folgen zwei Aufsätze, welche die Verbindung durch die Trennung (auch Vergleichung?) durch die Subtraction anzeigen sollen. Rezensent hat Gründe, warum er sie hierher setzt. Das Exempel ist: Einer kauft 5 Loth 12 löthiges, 6 Loth 8 löthiges, 7 Loth 6 löthiges Silber, wovon er die Mark fein mit 12 Thlr. in Golde behandelt, wie viel beträgt die Bezahlung in Hannöverschen Kassengelde? der Aufsatz sieht so aus:

D.	M.
? Kasseng.	— 5— 6— 7 Loth
16 Loth	—12— 8— 6 Loth fein
16 Loth fein	—12—12—12 Thlr. in Golde
15 Thlr.	—14—14—14 Thlr. Kasseng.

Hier ist D. die Divisions- und M. die Multiplikations-Kolumne, welche aus 3 Reihe Gliedern besteht, so durch die Addition verbunden werden; welches im Buche erst weiterhin erkläret wird. Macht man aus diesem Exempel folgendes: Einer kauft 6 Loth 8 löthiges, 7 Loth 6 löthiges und 5 Loth Silber, behandelt die Mark fein zu 12 Thlr. in Golde, zahlte in Kassenmünze für alles $6\frac{9}{16}$ Thaler. Wie viel löthig waren obige 5 Loth? so sieht der Aufsatz so aus:

		nach Abzug
? Loth fein	— 16 Loth	8 — 6 Loth fein
5 Loth	— $6\frac{9}{16}$ Thl. Kg.	6 — 7 Loth
14 Thlr. Kg.	— 15 Thlr. Gold	14 — 14 Thlr.
12 Thlr.	— 16 Loth fein	12 — 12 Thlr.

Re-

Rezensent glaubt, daß dieser Satz, mit vielen seines Gleichen, für dem practischen Rechner und für Anfänger zu schwer seyn wird, als daß er sollte allgemein werden: denn es gehört schon rechte innere Kenntniß von den Theilen eines Exempels dazu, wenn nicht blos ein Aufsatz nach dem andern geformt werden soll.

Hierauf werden (S. 4.) die **Vortheile** dieser Methode erzählt, und dies sind folgende: Man darf alle Glieder durch einen **gemeinschaftlichen** Divisor gegen einander aufheben oder verkleinern, und findet **nicht selten**, daß man zuletzt nur mit geringen Zahlen zu arbeiten hat. Rezensent zweifelt, daß die Vorfälle, so wie sie im Leben aufstoßen, solche Sätze geben, in welchen man es durch's Verkleinern dahin bringt, nicht selten mit geringen Zahlen zu thun zu haben, und er ist überzeugt, daß dieser Vortheil oft Schaden ist, wovon im Buche Beyspiele genug sind. z. B. Nr. 6. S. 12. welches nach dieser Methode zu berechnen, niemand zu rathen ist, wenn man nicht viermal so viel Mühe und Zeit verwenden will. Der H. V. dieses Abschnitts würde dies selbst gefunden haben, wenn Er diese Methode und die bekannte bei diesem Exempel verglichen hätte. Dergleichen sind auch Nr. 11. 13. 18. 21. 52. und mehrere, wo bei dieser Methode der Vortheil des Aufhebens nicht angebracht werden kann, da es sich doch nach der bekannten Methode berechnet, größtentheils thun läßt. Es wäre also bei

dieser

dieser Art eine Regel zu einer geschickten Auswahl nöthig, und die fehlt.

Hierauf folgt nun S. 5-92. der erste Abschnit, welcher aus 4 Kapiteln und 203 Exempeln besteht, und von vermischten Größen handelt. — Das erste Kapitel, welches keinen besondern Titel hat, enthält auf 49 Seiten 109 Exempel, und nur hin und wieder einige Anmerkungen, welche zusammen höchstens 4 Seiten betragen würden. Die Exempel sind von der Art, daß sie alle entweder in der Multiplikations- oder Divisions-Kolumne durch Addition oder Subtraktion mit einander verbunden sind; solche aber wo diese Verbindung in beiden Kolumnen zugleich vorkömt, und die doch würklich vorkommen können, finden wir nicht.

Hier ist eins von der Art: Einer ist schuldig 600 Thlr. auf 3 Monathe zu $3\frac{1}{3}$ pro Cent, 800 Thlr. auf 6 Monate zu 5 pro Cent, will beide Kapitale nebst den Zinsen auf einmal bezahlen, ist die Frage: nach wie viel Zeit? — Die Exempel sind von verschiedenen Gattungen aber durch einander geworfen. Das 54ste bis 56ste Exempel müssen jedem Leser auffallen. Das erste heißt: Ein Schif kann von H. nach B. mit dem großen Segel in zwei Monathen, mit dem mittlern in drei Monathen, mit dem kleinen in vier Monathen segeln. In wie viel Tagen würde es B. mit allen Segeln, bei beständig guten Winde erreichen können, den Monath zu 30 Tage gerechnet?

Der

Der Satz ist

? Tage —— $\frac{1}{80}$ —— $\frac{1}{90}$ —— $\frac{1}{120}$

Facit $27\frac{9}{13}$ Tage.

Hier ist Frage und Fragezahl, und kein Nachsatz, keine Bedingung wornach die Frage bestimmt werden soll. Vorfälle dieser Art werden immer unverständlich bleiben, und es hätte eine sichere Regel dafür angegeben werden, zum wenigsten mehr darüber gesagt werden müssen, als die nichts erklärende Anmerkung. — Was die **Anmerkungen** betrift, so sind diese darum nicht zu loben, weil es Anmerkungen sind. Sie hätten es nicht seyn sollen, wenn das Buch nutzbar seyn sollte; sondern es wird ein unterrichtender zusammenhängender Vortrag erfodert, wenn man die Absicht hat, etwas gemeinnützig zu machen, zumal, wenn es noch nicht bekannte Dinge sind: hier aber muß der Leser die Hauptsache aus den zerstreueten Anmerkungen zusammen suchen, welche doch immer kein Ganzes ausmachen; und wie kan das der Anfänger? Gleich im Anfange dieses Capitels, wo bei einem leichten Beispiele, die Zusammensetzung durch die Addition gezeigt wird, wird eine Anmerkung eingeschaltet, deren Inhalt wichtig ist, aber hier nicht zwischen gehörte, und die Erläuterung trennet. Die Anmerkung sagt: "daß, um in der Kette zu rechnen und alles auf das genaueste zu bestimmen, man auch die unbedeutende Zahl Eins*) wiederholt

z. B.

*) Ueber Raphael Levi's Rechnungsmethode §. 9. u. f. (Arithm. Mag. 1. St.)

z. B. 500 Thlr. sind auf 8 Monathe verliehen, so heißt das: **Ein jeder** von diesen 500 Thlr. hat 8 Monathe ausgestanden, welches bessere Ausführung verdiente.

Das **zweite Kapitel** des **1sten Abschnits** handelt von der **Gesellschaftsregel in verschiedenen Größen** S. 55—64. Hier stößt man gleich auf eine Neuheit, aber ohne die geringste Anweisung, (denn die nichts sagende Anmerkung kann man für keine rechnen) nemlich um auszurechnen: "Wenn A $112\frac{1}{2}$ Thlr. B 200 Thlr. C $292\frac{1}{2}$ Thlr. für 22 Ochsen zu weiden gegeben, A seine Ochsen $4\frac{1}{2}$ Monath, B 5 Monathe, C $6\frac{1}{2}$ Monath, auf die Weide getrieben hätte, wie viel Ochsen hat A geweidet? muß man (so heißt es in der Anmerkung) die Thaler und Monathe in Brüche verwandeln.

Der Aufsatz ist denn

$$? \text{ Ochsen} \text{ ——— ——— ——— ——— } \frac{225 \text{ Thlr.}}{9 \text{ Mon.}}$$

$$\frac{225}{9} \text{ ——— } \frac{400}{10} \text{ ——— } \frac{585 \text{ Thlr.}}{13 \text{ Mon.}} \text{ ——— } 22 \text{ Ochsen}$$

Ein solcher Fall hätte doch wohl eine nähere Bestimmung, und die Beantwortung der Frage: warum so? auf welche jeder Leser, der sich die Mühe nimmt, das Buch durchzulesen, natürlich fallen muß, verdienet.

Das dritte Kapitel des 1sten Abschnits von Allegationsrechnungen (S. 65 — 80.) dies Kapitel ist das Beste in den beiden ersten Abschnitten, und die Methode merkwürdig; wahrscheinlich war von diesem das Mehrste in der Handschrift vorhanden. Ich

will

will hier das Hauptsächlichste der Regel zusammenziehen. Man macht nach den Umständen der Frage, einen ordentlichen Kettensatz. Zur Rechten und Linken setzt man bei den Gehalt oder Werth der vorhandenen Theile den Gehalt oder Werth den man verlanget, in eine Klammer eingeschlossen. Alsdenn subtrahiret man die nun beieinanderstehende Gehalte, die kleinste Zahl von der größern, und setzt den Rest statt des im Satze stehenden Gehalt oder Werths und berechnet damit nach der gewöhnlichen Regel, so daß die Zahlen der zur Subtraktion gebrauchten Werthe, gar nicht mehr geachtet werden. Der Gehalt des Kupfers = 0 Loth fein, wird mit im Satze gebraucht. Hier ist das erste Beispiel. Einer hat $17\frac{1}{2}$ Mark $14\frac{1}{2}$ Löthiges Silber; er wil so viel Kupfer zusetzen, daß es nur 12 Löthig werde. Wie viel Mark Kupfer muß er zusetzen?

? Mark Kupf. ——— $17\frac{1}{2}$ Mark Silb.

1 Mark Silb. ——— $\not{1}\not{4}\frac{\not{1}}{\not{2}}$ Loth fein ($\not{1}\not{2}$

$\not{1}\not{2}$) $\not{0}$ Loth fein ——— 1 Mark Kupf.

12 Rest. $2\frac{1}{2}$ Rest.

Es giebt denn auch von dieser Art zusammengesetzte Fälle. *)

Das 4te Kapitel des 1sten Abschnits von Rabat Rechnungen. (S. 81 - 92) Hiervon ist keine be-

*) Diese werden in der Fortsetzung der Abhandlung über die Raphaelsche Rechnungs-Methode alle gezeigt werden. A. d. H.

bestimmte hinlängliche Regel gegeben, wohl aber 29 Exempel. Das besondere Verfahren hierbei läßt sich leicht lernen, für einen blos pracktischen Rechner aber nicht so leicht einsehen. Hier ist ein Aufsatz davon. Jemand kauft eine Handschrift, von 3297 Thlr. die nach 7 Monathen fällig ist, zu 8 pro Cent Disconto wie viel beträgt der Abzug oder Rabat?

? Thlr. Abz. ——— 3297 Thlr. in der Handsch.
7 Mon. — 1 Thlr. ——— 7 Monat fällig
12 Monat —— 1 Thlr. von 12 M.
8 Thlr. — 100 Thlr. ——— 8 Thlr. Abzug

Ob aber immer Vortheil bei dieser Methode ist, daran zweifelt Rezensent.

Nun folgt der 2te Abschnitt von Seite 93-170. unter den Titel: **Aufsätze für die gewöhnliche Regel. — Erstes Kapitel. Bekannte Falle.** Rezensent weiß nicht was er unter diesen Titels sich denken soll. Aufsätze für die **gewöhnliche** Regel gehören doch in kein Buch, worin man eine besondere Regel zeigen will, wenn man nicht die Absicht hat, ein theures Buch zu machen. Die im Ersten Kapitel zusammengetragene 113 Exempel für **bekannte** Fälle (Sind denn die im vorigen Abschnitt gesammelte Fälle **unbekannte**? Sie sind doch schon alle bekannt, nur die Art der Behandlung nicht,) sind freilich alle bekannt, aber es zeichnet sich eine nicht unbeträchtliche Anzahl aus, von welchen der Aufsatz immer eine Erfindung Raphael Levi's ist. z. B. gleich das erste Exempel: "Es sind 500

Thlr.

Thlr. Kapital auf 8 Monate jährlich zu 6 pro Cent ausgeliehen. Wie viel Thaler Zinse bringen sie?

? Thlr. Zinse	———	500 Thlr. Kap.
1 Thlr.	———	8 Monat
12 Mon.	———	1 Thlr. v. 100
100 Thlr.	———	6 Thlr. Zinse

Das 20, 23-30, 32-39, 45, 49, 51-65, 71, 75-77, 80, 84-88, 90-93, 97-99, 100-113 Exempel sind alle Vorfälle für die schon lange bekannte Kettenregel, und hätten gar nicht in dies Buch gehört. — Eben dies gilt von dem **zweiten Kapitel** dieses Abschnitts, welches **von Wechsel-Rechnungen** handelt, und in 80 Exempeln zum Theil alle Wechselfälle beibringt, die aber alle Aufsätze der bekannten Kettenregel haben: denn Raphael's Regel konnte hier nichts besonders lehren.

Dritter Abschnitt. Die vier Species des Rechnens mit Brüchen. Wären die ersten Abschnitte so bearbeitet, wie dieser letzte! — Das **erste Kapitel** dieses Abschnitts enthält zuerst einige nöthige Erklärungen und Regeln, welche vorausgehen mußten. Dann folgen die 4 Rechnungsarten in Brüchen, nach Methoden, die von den bekannten abweichen, und auch Erfindungen Raphaels sind.

Es ist nicht möglich, hier davon im Auszug einen Begriff zu machen, und Rezensent kann nichts mehr davon sagen, als daß die Addition und Subtraktion mehr Schaden als Vortheil bringt, und die Multiplika-

 tion

tion und Division mit den bekannten Auflösungen gleich ist. — Das **zweite Kapitel** zeigt, wie verschiedene Species des **Rechnens mit Brüchen in einen Aufsatze mit einander verbunden** werden. Diese Verbindung ist die Erfindung des Hrn. Kammersekretairs Grote,*) welche in allem Betracht ein weiteres Nachdenken verdient, wir wünschten daher dem H. V. viel Musse, um diese Verbindung auf die Vorfälle im Leben auszudehnen, und die Auflösung aus den bekannten Regeln systematisch zu beweisen. Nicht immer ist diese Methode aber Vortheil, und Rezensent hat sichere Gründe, noch oft der Auflösung in mehreren Sätzen den Vorzug einzuräumen. Gut wär's also, wenn die vortheilhaften Fälle bestimmt würden, um Vortheile da zu gebrauchen, wo es wahre Vortheile sind. Auch selbst kann man in dieser neuen Methode noch Abkürzungen machen, die nicht angeführet sind: welches freilich aber nur Specialregeln seyn würden. Weil ohne Undeutlichkeit und Verstümmlung sich von dieser Verbindung nichts sagen läßt, so setzt Rezensent auch nichts davon her, als blos ein kleines Beispiel, welches der Leser mit seiner Art zu rechnen vergleichen kann. Was ist der

der,

*) Schon Raphael verband die Rechnungsarten in Brüchen mit einander, aber sie mußten in einer bestimmten Ordnung auf einander folgen, und alsdann war die Auflösung doch noch weitläuftiger als diese, welche ohnehin für alle Verbindungen der 4 Species Regeln giebt. Ich muß mit viel Ueberzeugung meinen Wunsch mit dem Wunsche des Rezensenten vereinigen. A. d. H.

Quotient, wenn von $\frac{2}{3}$ subtrahirt wird $\frac{1}{6}$, der Rest aber mit $\frac{5}{9}$ multiplicirt, und das Produkt durch $\frac{7}{12}$ addirt wird.

			subtr.	mult.	div.
? Quot.	—	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{12}{7}$
6		6	3		2
3		2			
7					
9					
63		4	1	5	2

— 1

3

5

15

× 2

$\frac{30}{63} = \frac{10}{21}$ Quotient.

Geometrisch-arithmetisches Lehrbuch, für Liebhaber und Anfänger, in praktischen Ausrechnungen dargestellet, und durch Figuren erläutert von David Andreas Vollimhauß, Lehrer der Mathematik, auch Schreib- und Zeichenmeister der Altstadt Han-

Hannover. Hannover bei Joh. Wilh. Schmid 1783. 17 Bogen ohne Dedikation in 8 mit 2 Kupfertafeln. (Preiß 12 Ggr.)

Wenn ich sage: daß das Publikum hier mit einen vielversprechenden Titel getäuscht wird, so sage ich nicht zuviel; denn die ganze Ausführung entspricht ihm nicht. Ich nenne ein **Lehrbuch**, worin eine Wissenschaft, oder ein beträchtlicher Theil derselben, welcher für sich ein gewisses Ganze ausmacht, deutlich, gründlich und zusammenhängend vorgetragen ist: und was sollte es anders seyn? Ein geometrisch: arithmetisches Lehrbuch wäre also ein Buch, worin die Anwendung der Geometrie auf arithmetische Vorfälle deutlich, gründlich und zusammenhängend vorgetragen werden. Ob und in wie ferne die Geometrie auf die Arithmetik angewendet werden kann, diese Untersuchung gehöret hier nicht her; wie aber H. Vollimhauß die Anwendung in diesem Lehrbuche veranstaltet hat, das wollen wir jetzt sehen. — Man muß nichts weniger in diesem Buche suchen, als diese Art Anwendung; sondern es ist darin zum Theil die Arithmetik auf Geometrie angewandt, und nach den Lehren der Arithmetik rangiret; größtentheils aber ist es blosse Arithmetik. In der Vorrede sagt der H. Verf. die Rechenkunst in derjenigen Ordnung, wie deren Fächer auf einander folgen, durch Anwendungen auf mathematische Fälle vorzutragen; — eine Entschliessung wozu ihm viele würden Glück gewünscht

wünscht haben, indem diese Arbeit nützlich und angenehm seyn würde, und der Gegenstand so reich am Stoff ist, daß sich viel gutes, selbst neues darüber hätte sagen lassen. Aber ich weiß nicht, der H. V. muß entweder seinen Zweck vergessen, seinen Gegenstand verlohren, oder keines von beiden recht gekennt haben.

Mathematisch, geometrisch sollen seine Anwendungen der Arithmetik seyn: und man erstauet gleich auf der ersten Seite, in **dem ersten Kapitel,** welches **von der Anwendung der vier Rechnungsarten** handelt, gleich die **erste Aufgabe** ist folgende: "Wie stark wird eine neu geworbene Kompagnie, zu welcher ein Lieutenant 40 Rekruten liefert, ein Fähndrich 35, der erste Sergeant 28, der zweite Sergeant 20 und ein Unter-Offizier 15 Mann?" — Sind gelieferte Rekruten auch geometrische Data? und ist die Summe davon, oder die neue Kompagnie ein mathematisch Resultat? Wer glaubt das? — Die Aufgabe selbst ist schon lächerlich genug.

Von den 21 Exempeln des ersten Kapitels sind nur $\frac{2}{5}$ die geometrisch können genant werden, wenn man jede geringe Beziehung auf die Geometrie auch mit in Rechnung bringt. *)

Das

*) Es ist ein gewisses Uebel, welches in vielen Exempeln, in Herrn Vollimhaus Schriften herscht: nemlich, daß derselbe oft Ungeheuer schaft, und zu wenig auf Möglichkeit, und Verhältniß der Data untereinander sieht. — Die 4te Aufgabe aus der Subtraktion (Seite 10) ist ein Beispiel davon.

Es

Das 2te Kapitel handelt von der Anwendung der Quadrat- und Kubick-Rechnung. Die Exempel (denn mehr als Exempel enthalten beide Kapitel nicht) von den Quadratzahlen sind soweit ziemlich natürlich, ausser das 6te. Darin ist der Fall angenommen, daß ein Gutsherr mit seinen Bauren wegen der Grundzinse streitet; der Gutsherr sagt: es betragen die Stücke Landes 36 Morgen, und die Bauren sagen, es sind 22 Morgen. Das Gericht entscheidet es solle die Grundzinse für so viel Morgen Land bezahlt werden, als eine mittlere (geometrische) Proportionalsumme ausweisen werde. — Welch Gericht würde einen sol-

Es wird darin ein Thurm supponiret, dessen ganze Höhe 3218 Fuß beträgt, und wovon ein viertel im Wasser und ein sechstel in der Erde stehet; man soll die sichtbare Höhe berechnen. — Ein Thurm — der 3 mal so hoch als der Brokken und mehr als 5 mal so hoch wie Strasburgs Wunder Europa's; ein Thurm, der 526 Fuß tief in der Erde, und mit einer kleinen Sündfluht 804 Fuß hoch umringt, steht — welche Angaben! — Dergleichen unverhältnißmäßige oft unmögliche Angaben schaden zwar einen etwas erfahrenden denkenden Leser nichts, aber der Jugend und Anfängern den Erfahrung und Belesenheit fehlt, geben sie irrige Begriffe von den Dingen; denn sie glauben immer getrost hin, daß die Angaben würklich so sind oder seyn können, blos auf die Autorität des Lehrers: ist das aber nicht gegen den Zweck, Aufklärung zu verbreiten, und diese Menschen mit den Dingen der Welt, wobei sie ihre Wissenschaft anwenden sollen, näher bekannt zu machen? bei den Kennern aber, verräth es die Unwissenheit des Lehrers der Mathematik —.

solchen Spruch thun, für welchem so wenig Civilgesetze als mathematische Grundsätze reden. Ein arithmetisch Mittel entschiede schon besser, aber doch nicht recht; — Man messe und entscheide dann.

Die 3te Aufgabe für die Kubikzahlen setzt ein Torfmagazin fest, das gleiche Höhe, Länge und Breite hat. — Wer hat je ein solch Gebäude gesehen?

Das 3te Kapitel handelt **von den Proportionen, Verhältnissen und Progreßionen,** und macht beinahe die Hälfte des ganzen Buchs aus; würde auch ohne Zweifel das Beste desselben seyn, wenn nicht Fehler dieses Lob wieder wegwischten. — Eigentlich gehörte dies Kapitel, so theoretisch abgehandelt nicht in ein geometrisch-arithmetisches Lehrbuch, wo nur Anwendungen gefordert werden. Erklärungen, Auflösungen und Beweise sind sowohl nach Zahlen als buchstäblichen Größen vorgetragen: eine lehrreiche Methode

Nach einem wenig bedeutenden Eingange, werden im **1sten Abschnitt** dieses Kapitels sehr gut **die bei den Proportionen und Progreßionen nöthigen Erklärungen** vorgetragen, und darauf im **2ten Abschnitte von den Eigenschaften der arithmetischen Proportionen und Progreßionen geredet.** Bis zum 7ten Lehrsatz ist alles gut und richtig vorgetragen; aber in dem Zusatz zum 58. §. ist die Formel

$D = \frac{u \backsim a}{n - 1}$ (wofür, durch einen Druckfehler

D

$\frac{D = u \backsim a}{n - 1}$ stehet;) auffallend. Was soll hier das liegende S bedeuten? Die Aehnlichkeit, wie in der Geometrie kann es doch nicht bedeuten. — Es soll die Subtraktion bedeuten: und ist eine zu Irthum führende Neuerung. Selbst in einer Formel für einerlei Gegenstand, zweierlei Zeichen! u ist das lezte, a das erste Glied, n die Zahl der Glieder einer arithmetischen Progreßion, und obige Formel soll eine algemeine Formel für D oder der Differenz seyn. Ist denn die Formel $D = \frac{a - a}{n - 1}$ nicht algemein? — In dem Beweise für diesen Lehrsatz liegt ebenfalls ein Fehler, der das Resultat desselben unrichtig macht, und den man auf die Rechnung der Druckfehler nicht eigentlich schreiben darf. Hier ist er.

$$u = a + (n - 1)d$$
$$a = a$$
$$\overline{}$$
$$\frac{u - a}{n - 1} = (n - 1)d$$

Wer sieht hier nicht die Unrichtigkeit der Entwiklung?

Nun blättere ich um, und schon wieder sehe ich eine fehlerhafte Entwicklung eines Beweises, von dem Lehrsatze: " daß die Anzahl der Glieder in einer arithmetischen Progreßion, den Quotienten gleich sey, welcher entstehet, wenn man das lezte Glied weniger den ersten, durch die Differenz der Progreßion dividiret,

und

und dazu die Einheit addiret. „ Ich muß ihn hieher setzen, um ihn zu berichtigen.

$$u = a + (n - 1)\,d$$
$$u = a + nd - d$$
$$u = a + d = nd$$
$$u = \frac{a + d}{nd} = d$$
$$u - \frac{a + 1}{d} = n.$$

Wie kann aus $u = a + nd - d$, $u = a + d = nd$ entstehen? Das würde heißen: das lezte Glied sey gleich dem ersten und der Differenz, und auch dem Produkte aus der Differenz und der Anzahl der Glieder. Der erste Fall wäre nur dann möglich, wenn die Progreßion aus 2 Gliedern bestünde; aber dann ist sie nicht mehr Progreßion (Proportionalreihe) sondern Verhältniß. Der andere Fall, daß $u = nd$ ist gar nicht anders möglich, als wenn $a = d = n = 2$ ist. — Als Druckfehler kann dieser Fehler nicht entschuldigt werden, denn H. V. hat darauf die folgende Entwickelung fortgesetzt, und ein — seinem Lehrsatze entgegenlaufendes Resultat geliefert.

Hier ist der Beweis wie er seyn sollte:

$$u = a + (n - 1)\,d$$
$$u = a + nd - d$$
$$u - a + d = nd$$
$$\frac{u - a + d}{d} = n, \text{ und weil } \frac{d}{d} = 1$$
$$\frac{u - a}{d} + 1 = n.$$

Nun

Nun vergleiche man.

Verfolgt man diesen Lehrsatz, so findet man nach ein paar richtig berechnete Exempel folgenden Zusatz: "Hieraus fliesset also die allgemeine Formel, wie man für jede arithmetische Progreßion die Anzahl der Glieder finden kann, nemlich.

$$N = \frac{u \backsim a + 1}{d}."$$

Welcher Liebhaber und Anfänger wird diese Formel verstehen oder brauchen können? —

Ich werde aufhören müssen, alle die folgenden Fehler so umständlich zu zeigen, weil sonst meine Rezension über die Grenzen einer Abhandlung käme, die das Werk nicht verdienen mögte. Also nur eine kurze Anzeige von den wichtigsten, mehr nicht.

Seite 71, ist folgender Zusatz: "Weil die Differenz des ersten und letzten Gliedes, durch die Anzahl der Glieder — 1 dividiret wird, wenn man die Differenz der Progreßion finden will, so erhellet hieraus, daß man auch die Differenz der Progreßion finden kann, wenn man die Differenz des ersten und letzten Gliedes, durch die Anzahl der mitlern Proportionalglieder + 1 dividiret, als von welcher Operation, die allgemeine Formel folgende ist:

$$\frac{u \backsim a}{n + 1} = d."$$

Der Satz selbst ist richtig: aber die Formel darum nicht, weil n die Anzahl der Glieder, der ganzen Pro-

Progreßion anzeigt, nicht aber die Anzahl der mitlern Proportionalglieder: denn dafür hätte ein anders Zeichen gewählt werden müssen. H. Vollimhauß hat also die erste Regel in der algebraischen Charakteristick nicht gewußt: daß zu verschiedenen Grössen auch verschiedene Zeichen gewählt werden müssen.

Hierauf folgen in 7 Aufgaben Anwendungen der der gelehrten Lehrsätze, deren Ausführung deutlich und richtig ist: nur schade, daß die Aufgaben zu erkünstelt, und die wenigsten, wider den Zweck, mathematisch sind.

Nun folget der 3te Abschnitt, worin **die Eigenschaften derer geometrischen Proportionen und Progreßionen** abgehandelt werden. Von den geometrischen Proportionen werden zuerst in zwei Lehrsätzen die Eigenschaft derselben: daß das Produkt der beiden äussern Glieder dem Produkt der beiden mittlern gleich ist, für die discrete und continuirliche Proportion abgehandelt und in einigen Aufgaben angewandt. Hierauf folgen die verschiedenen Arten der Veränderungen der Proportionen, wozu jene Lehrsätze zum Grunde gelegt werden mußten. Eine für die Geometrie wichtige Veränderung ist aber weggelassen: nemlich, daß wenn aus den Gliedern der Proportion die Wurzel von einem gewissen Grade extrahiret wird, die Wurzeln eine geometrische Proportion wieder geben. Ueberhaupt ist von den Veränderungen der Proportionen und Erhöhungen und Extraction der Potenzen weiter nichts gesagt, als daß, wenn man die Glieder zum Quadrat erhebt, die

Qua=

Quadrate in geometrischer Proportion stehen. Dürfen diese Veränderungen in einen geometrisch-arithmetischen Lehrbuche, worin doch absolut die Theorie der Rechenkunst den größten Theil ausmachen sollte, fehlen!

Auf diese Lehre folgt die **von den zusammengesetzten Verhältnissen,** welche, wie das vorige, recht gut, richtig und deutlich vorgetragen.

Von den geometrischen Progreßionen. Auch dieser Abschnitt ist gut vorgetragen; man stößt aber §. 97 auf eine Sonderheit: neinlich, man sieht wilkürlich angenommene Logarithmen, die in keine Tafeln stehen, und aus gar keinen Systeme sind. Der H. V. entschuldiget diese Sonderheit damit, daß solches bei Gleichnisse nicht schade: — sind Exempel also auch Gleichnisse? — Für die sich belehrenden Leser ist es allerdings Schaden, und für alle Betrug. Besser wäre gethan, und dem Zwecke ganz angemessen, wenn etwas von Logarithmen, diese Mittel zu bequemen geometrischen Berechnungen gelehrt worden wäre. Es sind aber überall wo Logarithmen gebraucht sind, dieselben wieder gebraucht.

In fünf Aufgaben sind die Anwendungen der Progreßionen gegeben. In den Auflösungen der Aufgaben ist eine gute Deutlichkeit beobachtet, und gezeiget, wie man mit gesunden Menschenverstand die gegebene Lehrsätze brauchen solle. Die Aufgaben sind aber erkünstelt und unmathematisch.

Das

Das 4te Kapitel handelt von der Regel detri, und zwar wird in 16 Aufgaben die gemeine und in 8 die verkehrte Regel detri abgehandelt.

Die 5te Aufgabe muß ich herausnehmen, um, wenn ich deren Unrichtigkeit zeige, die Ehre der andern zu retten. Sie heißt so: "Eine Brustwehr von 14500 Kubik-Ruthen aufzuführen, werden 100 Mann von der Garnison dazu bestimmet, wie lange werden nun selbige über dieser Arbeit zubringen, da sie täglich 189 Kubikruthen verfertigen können?

Auflösung

25 K. R. 14500 K. R. 1 Tag

$$\begin{array}{r|l} 125 & \\ \hline 200 & 580 \text{ Tage} \\ 200 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Der Beweis von der Richtigkeit dieser Aufgabe gründet sich auf die Lehre von den Verhältnissen." So weit der H. V. — Es ist zu bewundern, daß dem H. V. die Unrichtigkeit des Facits nicht selbst aufgefallen ist. 580 Tage arbeiten und täglich 189 Kubikruthen verfertigen: wer sieht's da nicht gleich beim ersten Anblicke, daß ungleich mehr als 14500 Kubikruthen verfertiget werden? 580 ⨯ 189 ist = 109620 Kubikruthen, also mehr als 7mal mehr, wie die Grösse der Brustwehr. Und — woher der Aufsatz? woher die 25 Ku-

hitruthen? Nach folgendem rechten Satze entstehen 76 $\frac{136}{189}$ Tage.

189 K. R. — 14500 K. R. — 1 Tag

```
   1323  | 76
   ----
    1270
    1134
    ----
     136
```

Alle übrigen Auflösungen der Aufgaben über die einfache Regeldetri sind richtig aufgelöset, zum Theil auch gut erkläret. In dem Abschnitte von der verkehrten Regeldetri gehen auch gute Bemerkungen über den Gebrauch und Unterschied von der gemeinen vor den Aufgaben voran.

Hierauf folget die Lehre **von der Regel = Composita** sowohl **direkte als verkehrte.** Unstreitig ist dieser Abschnitt der Beste des Buchs. Die Ausführung ist deutlich, richtig und unterrichtend. — Der H. V. setzt die Data, deren Produkte zu den übrigen ein Verhältniß haben, im Satze untereinander, und so übersieht man leicht die geometrische Proportion. Ich will einen Aufsatz hersetzen. Exempel: Zu Ausbringung eines Grabens, dessen Länge 200 Ruthen, die Breite 8 Fuß und die Tiefe 10 Fuß ist, wurden 30 Mann 8 Tage lang gebraucht; und nun will man noch einen andern Graben verfertigen lassen, welcher 600 Ruthen lang, 12 Fuß breit und 9 Fuß tief seyn soll, zu diesem werden 3 Tage Zeit gegeben wie viel Arbeiter werden also hierzu nöthig seyn?

Satz.

Satz.

Länge 200 Fuß	30 Mann	6000 Fuß Länge	
Breite 8 ⸗		12 ⸗ Breite	
Tiefe 10 ⸗		9 ⸗ Tiefe	
Tage 3 ⸗		8 Tage	

Facit 324 Mann.

Das 5te Kapitel. Von der Gesellschafts⸗Rechnung. In der Einleitung zu diesem Kapitel wird die Beschaffenheit der Rechnung gezeigt, und auch gesagt, daß sie in Anwendung mathematischer Fälle brauchbar sey. Der H. V. hat aber keine eigentliche mathematische Fälle gedacht, als die beiden letzten Aufgaben, die geometrisch, auch gut entwikelt sind.

Eben so ist es mit den **6ten Kapitel** beschaffen, welches I. Die **Tausch⸗Rechnung** und II. Die **Vermischungs⸗Rechnung** enthält. In der Tausch⸗rechnung ist nur das letzte Exempel geometrisch, die übrigen aber nicht, dennoch aber nicht gemeine Fälle. Die Vermischungs⸗Rechnung leidet gar keine mathematische Anwendung, und hätte daher aus diesem Buche gänzlich wegbleiben müssen.

Das 7te und lezte Kapitel handelt von der Buchstabenrechnung. Es sollte eigentlich die Ueberschrift haben: Einige Aufgaben zur Anwendung der Algebra; denn es ist nichts weniger als Buchstabenrechnung darin abgehandelt. — In der Vorrede sagt der H. V. davon: "Von der allgemeinen oder algebraischen Rechnung findet der geneigte Leser zwar nur

wenige Anmerkungen in diesem Werke, jedoch sind sie von der Beschaffenheit, daß selbige auf verschiedene Umstände zielen und an Gewicht einander übertreffen. „— Das **Uebertreffen** hätte billig wegbleiben müssen.

Ich habe schon im Anfange gesagt: daß der Herr Verfasser seinem Zwecke nicht getreu geblieben; hier am Ende kann ich noch hinzusetzen, daß der kleinste Theil geometrisch ist, denn die mehrsten Anwendungen sind aus den militairischen Fache und davon größtentheils blos arithmetische gemeine Fälle, oder solche, davon gar keine würkliche Anwendung gemacht werden können. Wenige gute militairische und noch weniger kameralistische Vorfälle sind darin, wenn man auch bei der Musterung nicht darauf sieht, daß sie auf die Geometrie gegründet seyn sollten.

Hätte H. Vollimhauß das Feld, daß er bearbeiten wollte, recht gekannt, so würde ihm dasselbe nicht so enge vorgekommen seyn, und er würde nicht so ängstlich gesucht haben, es durch Kleinigkeiten und Abwege in der ihm bekannten Ecke zu erweitern. Die Kameralwissenschaft, Oekonomie, Forstwissenschaft, die Kriegswissenschaft, u. s. w. hätte ihm Stoff genug zu einer guten Anleitung in die geometrische Arithmetik gegeben, worin sich, wie ich glaube, noch vieles nicht ganz bekanntes, wohl gar neues sagen liesse. — Die Kupfer sind gut gestochen.

Zu=

Zusatz zu obiger Beurtheilung.

Rezensent hatte schon diese Beurtheilung geschrieben, als er ein Buch in die Hände bekam, unter dem Titel: **Die Anwendung der Arithmetik auf die mathematischen und besonders militairischen Wissenschaften, denen Anfängern zu bequemen Gebrauch ans Licht gestellt und mit nöthigen Figuren versehen von einem Liebhaber freyer Künste. Hannover bey Joh. Wilh. Schmidt. 1771.** (Titel, Vorrede und Erklärungen der Abkürzungen 4 Seiten, das Werk selbst 136 Seiten und eine Kupfertafel.) Sollte man es wol erwarten können? dies Buch hat H. Vollimhauß, ohne ein Wort davon zu sagen, (aber das durfte Er auch nicht) unter einen neuen Titel dem Publiko noch einmal gegeben. Zwar hat er dasselbe mit zwei neuen Kapiteln, nemlich den von Proportionen, Verhältnissen und Progreßionen, und den von der Buchstabenrechnung, wie auch mit einigen Aufgaben vermehrt; aber die Leser werden selbst erkennen, daß sie diese Zugabe, für die mehr kostbare, oder noch einmalige Anschaffung des Buchs unter einem andern noch mehr versprechenden Titel, dafür nicht schadlos halten könne; denn übrigens ist, wenn man einige nichtsbedeutende Abänderungen im Ausdrucke und ein Paar Fehler abrechnet, das neue Buch das vorige geblieben, außer daß auch einige Figuren mehr hinzugekommen, und dadurch das neue Buch 2 Kupfertafeln bekommen, da das von 1771 nur Eine hat.

wenige Anmerkungen in diesem Werke, jedoch sind sie von der Beschaffenheit, daß selbige auf verschiedene Umstände zielen und an Gewicht einander übertreffen. „— Das Uebertreffen hätte billig wegbleiben müssen.

Ich habe schon im Anfange gesagt: daß der Herr Verfasser seinem Zwecke nicht getreu geblieben; hier am Ende kann ich noch hinzusetzen, daß der kleinste Theil geometrisch ist, denn die mehrsten Anwendungen sind aus den militairischen Fache und davon größtentheils blos arithmetische gemeine Fälle, oder solche, davon gar keine würkliche Anwendung gemacht werden können. Wenige gute militairische und noch weniger kameralistische Vorfälle sind darin, wenn man auch bei der Musterung nicht darauf sieht, daß sie auf die Geometrie gegründet seyn sollten.

Hätte H. Vollimhauß das Feld, daß er bearbeiten wollte, recht gekannt, so würde ihm dasselbe nicht so enge vorgekommen seyn, und er würde nicht so ängstlich gesucht haben, es durch Kleinigkeiten und Abwege in der ihm bekannten Ecke zu erweitern. Die Kameralwissenschaft, Oekonomie, Forstwissenschaft, die Kriegswissenschaft, u. s. w. hätte ihm Stoff genug zu einer guten Anleitung in die geometrische Arithmetik gegeben, worin sich, wie ich glaube, noch vieles nicht ganz bekanntes, wohl gar neues sagen liesse. — Die Kupfer sind gut gestochen.

Zusatz zu obiger Beurtheilung.

Rezensent hatte schon diese Beurtheilung geschrieben, als er ein Buch in die Hände bekam, unter dem Titel: **Die Anwendung der Arithmetik auf die mathematischen und besonders militairischen Wissenschaften, denen Anfängern zu bequemen Gebrauch ans Licht gestellt und mit nöthigen Figuren versehen von einem Liebhaber freyer Künste. Hannover bey Joh. Wilh. Schmidt. 1771.** (Titel, Vorrede und Erklärungen der Abkürzungen 4 Seiten, das Werk selbst 136 Seiten und eine Kupfertafel.) Sollte man es wol erwarten können? dies Buch hat H. Vollimhauß, ohne ein Wort davon zu sagen, (aber das durfte Er auch nicht) unter einen neuen Titel dem Publiko noch einmal gegeben. Zwar hat er dasselbe mit zwei neuen Kapiteln, nemlich den von Proportionen, Verhältnissen und Progreßionen, und den von der Buchstabenrechnung, wie auch mit einigen Aufgaben vermehrt; aber die Leser werden selbst erkennen, daß sie diese Zugabe, für die mehr kostbare, oder noch einmalige Anschaffung des Buchs unter einen andern noch mehr versprechenden Titel, dafür nicht schadlos halten könne; denn übrigens ist, wenn man einige nichtsbedeutende Abänderungen im Ausdrucke und ein Paar Fehler abrechnet, das neue Buch das vorige geblieben, außer daß auch einige Figuren mehr hinzugekommen, und dadurch das neue Buch 2 Kupfertafeln bekommen, da das von 1771 nur Eine hat.

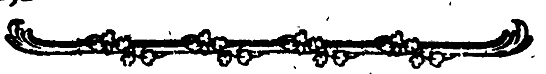


Nelkenbrechers Taschenbuch eines Banquiers und Kaufmanns, enthält Erklärungen aller ein- und ausländischen Münzen, des Wechsel-Courses, Usos, Respect-Tage und anderer zur Handlung gehörigen Dinge, mit einer genauen Vergleichung des Ellen-Maaßes, Handels- Gold- und Silber-Gewichts, auch Maaße von Getreide und flüßigen Sachen derer fürnehmsten Handels-Plätze. Fünfte Auflage, vermehrt und verbessert durch G. Berlin bey A. Weyer privil. Buchhändler 1781. 304 Seiten in 8. auf Schreibpap. (Preis 16 Ggr.)

S. 2-12. enthält die Einleitung einige nöthige Erklärungen über Münzen, Wechsel ꝛc. und etwas von dem Gebrauche der am Ende des Buchs folgenden Tabellen von Vergleichung des Ellenmaaßes, Handels- auch Gold- und Silber-Gewichts, desgleichen des Getreide, Wein, Oel, Bier u. d. g. Maaßes. Durch einen Regeldetri Satz kann man nach diesen Tabellen das Gewicht, Maaß ꝛc. des einen Orts mit den des andern vergleichen. — Dann folgen S. 13-288 die Nachrichten von jedem Handelsorte in alphabetischer Ordnung

nung, worin man das nöthigste von allen was man verlangen kann antrift. Doch wäre zu wünschen, daß mancher noch fehlender Ort ergänzt wäre, welcher zwar keiner der berühmtesten Handelsplätze wäre. z. B. Braunschweig und Hannover zusammenzusetzen, ist wohl nicht gut möglich, da sie in Münzfuße, Gewicht ꝛc. unterschieden sind. Das Gewicht, Ellen- und Hohlmaaß ist in diesen Nachrichten gegen Berliner verglichen, wie in Krusens Komtoiristen gegen Hamburger. S. 280-296 folgt eine **Tabelle von Vergleichung der Ellenmaasse, Handels- Gold- und Silbergewichts.** S. 297-300 eine **Tabelle von Vergleichung der Maasse flüßiger Sachen.** Die beiden letzten Tabellen wird mancher noch vollständiger wünschen. Uebrigens ist dieses Buch schon zu bekannt, als daß man von dem Nutzen desselben noch etwas zu sagen braucht. Diese neue Ausgabe ist an einigen Orten in den Nachrichten verbessert und vermehrt. Läßt man dies Buch mit Papier durchschiessen, und schreibt die vorkommenden Veränderungen darauf an ihren Ort, so hat man alle nöthige Nachrichten in einem Taschenbuche beysammen.





VI. Vermischte Anzeigen.

Anfragen

Basedow verspricht auf der 2ten Seite der Vorrede seiner bewiesenen Grundsätze der Mathematik (Leipzig 1774.) eine Anwendung zu der darin gelehrten Theorie zu liefern, die sich aber blos auf die Rechenkunst beschränken solle: ist sie herausgekommen?

M.

2.

Freyburg an der Unstrut den 30sten Merz 1784.

Ich habe nach der kopeilichen Anlage im vorigen Jahre dem Leipz. Intell. Blatte einige Aufgaben inseriren lassen, und wider alle Erwartung die ersten 3 gar nicht beantwortet; auf leztere aber unter zehn nur von vieren richtige Auflösung erhalten.

Es wird so viel geschrieben und gedruckt von der zu verbessernden Lehrart in Schulen: und gleichwol sind überall Klagen, daß junge Leute, wenn sie von Schulen und Universitäten kommen, nichts gelernt haben und mancher kaum zu antworten weiß, wie viel drittehalb mal drittehalb sey? Die rechten Mathematici sind zu allen Zeiten in großen Ansehen gewesen, und Plato hatte so hohe Gedanken davon, daß er Gott selbst

selbst zum Geometra machte. Unter dem Antoninus philosopho wurden grosse Belohnungen auf sie gesezt, u. s. w.

Johann Christian Petters.

Churf. Sächs. Steuerrevisor im Thüringschen Kreise und Amts-Steuereinneh. zu Freyburg.

Extrakt

aus dem Leipziger Intellig. Blatt Nr. 37 von 30sten Aug. 1783. Pag. 307.

Da in allen, zeither zum Vorschein gekommenen Rechenbüchern, verschiedene praktische und doch sehr nöthige Nachrichten nicht aufzufinden seyn; so werden die Herren Verfertiger derselben so wohl, als andere Rechenmeister und Feldmesser, hierdurch aufgefordert, binnen der Leipziger Michaelis-Messe jetzigen Jahrs, an das Intellig. Comtoir zu gedachten Leipzig eine gegründete Anzeige einzusenden.

1.) Wie viel ein richtiges Dresdner Kannenmaaß Leipziger Kubikzol in sich enthält? und wie viel Leipziger Gewicht Regen- oder Brunnenwasser darein gehen müsse?

2.) Wie viel Leipziger Kubikzoll ein richtiger Dresdner Scheffel habe? auch wie viel

a) Leipziger Pfund, Loth, Quent. Erbsen
b) = = = = = = Weitzen
c) = = = = = = Korn (Rocken)
d) = = = = = = Gerste
e) = = = = = = Hafer

f)

f) Dresdner Kannen von jeder Sorte darin gehen müssen?

3.) Wie viel Leipziger Quadratellen,

a) zu 1 Dresdner Scheffel Korn	Aussaat
b) = 1 = = = = Gerste	
c) = 1 = = = = Hafer	

nach guten, mitteln und geringen Felde, in jedem Kreise des Churfürstenthums Sachsen gerechnet werden? und

4.) Wenn einer 10,000 Rthlr. auf Interessen zu 5 pro Cent stehen habe, und dieses Kapital mit Interessen in 10 Jahren dergestalt ganz verzehren wolle, daß er ein Jahr so viel als das andere verthue; wie viel er also jährlich verzehren könne?

3.

Leonardus von Pisa, war derjenige, der im 15ten Jahrhundert die Algebra von den Arabern zu uns brachte, hat dieser über die Algebra etwas geschrieben? und ist etwas gedrucktes von ihm vorhanden?

Bisher hält man die Summa arithmetica & geometrica 1494. des Lucas de Burgo für das älteste gedrukte algebraische Werk: Wie weit ist darin die Algebra vorgetragen? War Lucas de Burgo ein Schüler von Leonardus von Pisa?

—e.

4.

Wo steht die beste Anweisung über den arithmetischen Unterricht geschrieben?

5.

5.

Wer war der Erste der die Logarithmen als Exponenten von Potenzialzahlen betrachtete?

Ersuchen.

Von Clausberg kann man unstreitig einen klassischen Schriftsteller der Arithmetik nennen; denn seine Schriften geben ihm dies Verdienst. Ob er zwar oft zu sehr in Vortheilen künstelte, welche in der Anwendung alle schwerlich brauchbar werden, so sage ich nicht zu viel, wenn ich sage: Er war es, der zuerst, mitten unter dem Wuste von Exempelbüchern und nichtsnützenden Künsteleien der Rechenmeister hervortrat, und ein Werk voll Unterricht, Gründlichkeit und Richtigkeit lieferte. Seine Verdienste um die kaufmännische Rechenkunst sind zu bekannt, als daß man sie weitläuftig bewiese. Von seinem Leben wird zwar im allgemeinen Gelehrten Lexicon gehandelt, welchen man einige Verbesserungen aus Dunkels Nachrichten 2r Band, S. 627. beifügen kann, aber dennoch fehlt vieles, ehe man an eine Biographie denken darf; und diese verdiente der Mann doch wol. — Dies Magazin bietet die Gelegenheit zu Beiträgen dazu an, und ich wünsche, das Freunde der Rechenkunst, die das fehlende ergänzen können, die Güte haben werden, diese Gelegenheit zu benutzen, um Beiträge dazu einsenden zu können.

C. W.

Auf=

Aufgabe und Ersuchen.

Es giebt Aufgaben, welche dem gemeinen Rechner vorkommen können, und die er ohne Hülfe der Algebra schwerlich auflösen kann. Folgende ist eine von dieser Art. Es kauft jemand Korn, und zwar zum ersten Male 10 Malter Weizen, 6 Malter Rocken, und 4 Malter Gersten für 96 Rthlr.; zum andern Male 12 Malter Weizen, 3 Malter Rocken und 7 Malter Gersten für 105 Rthlr.; Zum dritten Male 13 Malter Weizen, 19 Malter Rocken und 2 Malter Gersten für 160 Thlr. und zwar immer zu gleichem Preise. Wie viel galt das Malter von jeder Kornart? — Algebraisch aufzulösen, weis jeder Algebraist; aber wie für den gemeinen Rechner? Man giebt hierzu die Regel: man solle eine von den 3 gegebenen Angaben mit einer Zahl multipliciren oder dividiren, daß, wenn man das Produkt oder den Quotienten von einer der andern Angaben subtrahirte, oder auch diese Angaben von jenem Produkte oder Quotienten, alsdenn 2 Glieder davon sich einander aufheben und daher die Rechnung vermindern. z. B. dividiret man hier den ersten Kauf mit 2, so entstehet 5 Malter Weizen, 3 Malter Rocken, 2 Malter Gersten = 48 Rthlr., und subtrahiret man diesen Quotienten von dem zweiten Kauf, so bleibt 7 Malter Weizen, 5 Malter Gersten = 57 Thlr. Diese Operation muß nun mit zwei andern Angaben zu demselben Endzweck verrichtet werden, und so weiter, bis man soweit gelangt, daß nach der Subtraktion nur ein

Glied

Glied oder Kornart, und zugleich etwas von dem Preise überbleibt. Ich will der Deutlichkeit wegen die ganze Auflösung hersetzen:

1e Angabe	10 M. W.	6 M. R.	4 M. G.	96 Thl.
div. mit 2)	5 M. W.	3 M. R.	2 M. G.	48 Thl.
dies v. d. 2 A.	12 ⸗ ⸗	3 ⸗ ⸗	7 ⸗ ⸗	105 ⸗
A. bleibt	7 M. W.	und	5 M. G.	57 Thl.
die 1e Ang.	10 M. W.	6 M. R.	4 M. G.	96 Thlr.
mult. m. $3\frac{1}{6}$)	$31\frac{2}{3}$ M. W.	19 M. R.	$12\frac{2}{3}$ M. G.	304 Thlr.
dav. d. 3 Ang.	13 ⸗ ⸗	19 ⸗ ⸗	2 ⸗ ⸗	160 ⸗
bleibt	$18\frac{2}{3}$ M. W.	und	$10\frac{2}{3}$ M. G.	144 Thlr.
oder B.	56 M. W.	und	40 M. G.	432 Thlr.
Nun A. mit $2\frac{2}{3}$ mult.	56 M. W.	und	40 M. G.	456 Thlr.
u. B. dav. abgez. kömmt			8 M. G.	24 Thlr.

Das ist 8 Malter Gersten kosten 24 Rthlr. folglich $\frac{24}{8} = 3$ Thlr. kostet 1 Malter Gersten. Nun lässet sich nach A. und einer der Angaben der Preiß des Malters von Weizen und Rocken leicht finden. — Aber was ist hier nicht alle zu beobachten? und wer sagt den Rechner, wenn er auch die Zahlen, womit er multipliciren und dividiren muß, weiß, wer sagt ihm, welches Glied er am ersten ausfallen lasse, um seiner Rechnung die beste und leichteste Wendung zu geben? Sollte jemand sichere Regeln dazu besitzen, der wird recht sehr ersucht, die Güte zu haben, sie zum Besten sei-

seiner Mitbrüder bekannt zu machen, wozu dies Magazin Gelegenheit darbietet.

P.

Anfrage.

Wer war der erste, welcher die, in der kaufmännischen Rechnung für weitläuftige Rechnungsfälle übliche Specialregeln aufbrachte? wer hat die besten und sonderlich im Gebrauche am bequemsten angegeben? Etwa Clausberg?



Verbesserungen.

Seite 37. Zeile 10. ist statt 10 ggr. zu lesen 20 ggr.
" 84. " 7. statt Deparcieuz, Deparcieux.
" 136. " 24. ist nach dem Worte Verfasser hinzuzusetzen Er wolle.

Hannover,
gedruckt bey H. M. Pockwitz, Hofbuchdrucker.

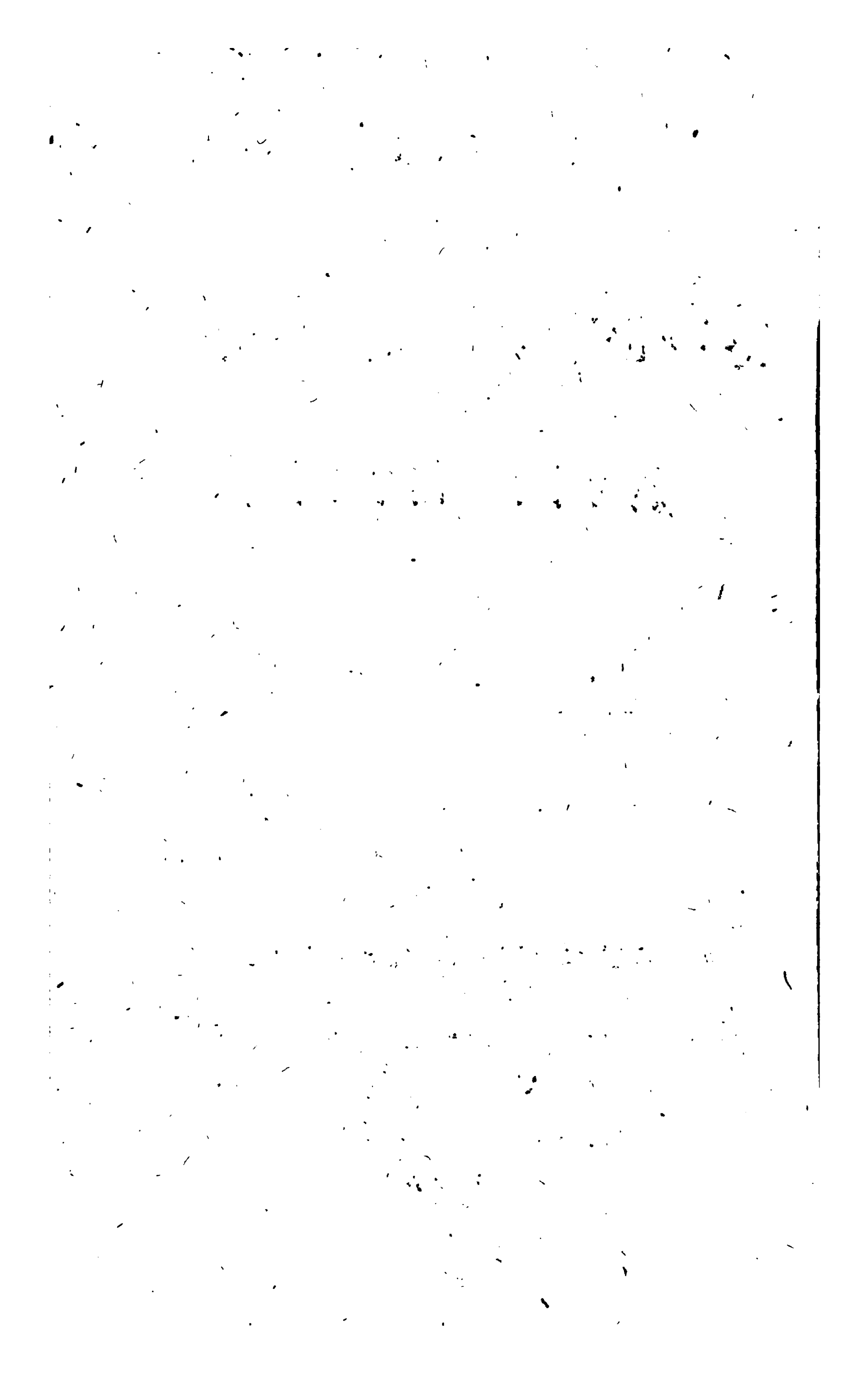
Versuch eines Magazins für die Arithmetik.

Zweites Stück.

von
Georg Friedrich Petersen.



Celle,
bey Ernst August Richter
1787.





Vorrede
zum zweiten und dritten Stücke.

Schon war der Anfang zu dem Manuscripte des 2ten Stückes gemacht, während daß das 1ste unter der Presse war. Zugleich aber führte mich der Weg meines Lebens zu einer Aussicht in meine Zukunft, worauf meine Seele zuerst mit strengem Blicke geheftet war, zulezt aber, da sich diese Aussicht trübte und am Ende gar verschwand, meine Seele in eine träge Unthätigkeit einschlummerte: keine meiner sonstigen Nebenarbeiten hatten Reitz für mich. Dadurch entstand, daß mein

Wunsch:

Wunsch: es in der folgende Messe folgen zu lassen, unerfüllt blieb; es auf die Ostermesse 1786. gewiß zu liefern, dieß wurde darauf doch fester Entschluß, welchen ich auch ausführte. Daß aber dennoch diese Fortsetzung erst ein Jahr nachher erscheint, davon hat mir zwar mein Herr Verleger die Ursachen gesagt, welche ich aber unmöglich meinen Lesern erzählen kann. Genug es erscheinet hier das 2te Stück, und das 3te wird nach der Messe gewiß erscheinen.

Sollten meine Leser hin und wieder Stellen bemerken, welche Flüchtigkeit an ihrer Stirne tragen, den die nöthige Politur fehlet, so bitte ich es aus dem Umstande zu verzeihen, daß ich, um jenen meinen Entschluß auszuführen, wenig Zeit hatte, auf die gehörige Politur immer zu sehen, weil andere Arbeiten mir einen grossen Theil meiner Nebenstunden raubten; hernach aber seit dem Jenner 1786. das

Manu-

Manuscript nicht mehr in meinen Händen war. — Nimt man alle 3 Stücke zusammen, so hoffe ich, daß jeder Liebhaber der Arithmetik gewiß einen Theil interessant finden wird; welches sich aber in einen einzigen Stücke nicht gut erhalten läßt. Für den ganz Unwissenden und Unbelesenen konnte es gar nichts, für den an gründliches denken nicht gewöhnten wenig Nutzen schaffen, wenig Reiz haben. Ich setzte Leser voraus, welche gründlich unterrichtet sind oder diese Gründlichkeit selbst erlangen wollen; Leser aus der Klasse der denkenden Zahlenrechner und auch der Algebraisten.

Im 3ten Stück wird Herr Z***, Arithmetikus in Franken, Auszüge aus seinem Schreiben an mich, womit er mich beehrt hat, finden: aber nur Auszüge, weil dieses Schreiben, um ganz eingerückt zu werden, theils zu wenig Ordnung, theils zu wenig Ausführlichkeit hat.

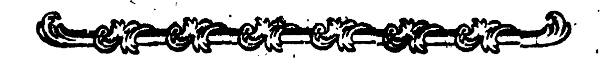
Einige Anmerkungen wird derselbe mir für sich und fürs Publikum gütigst erlauben. Alle Aufsätze also, worunter ein Z stehet sind Fragmente dieses Schreibens. Uebrigens wünschte ich, daß es H. Z. beliebte, sich mir zu erkennen zu geben.

Am Ende des 3ten Stücks kommt das versprochene alphabethischer Register, welches diesen 3 Stücken noch mehr Brauchbarkeit geben wird.

Hannover
im Merz

G. F. Petersen.

Jn=

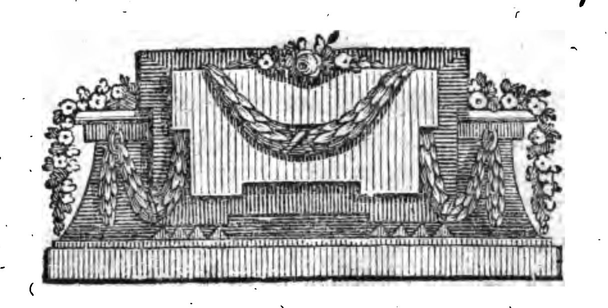


Inhalt

des zweiten Stücks dieses Versuchs eines Magazins für die Arithmetik.

für

I. Fort=



I. Fortsetzung der Abhandlung:

Ueber Raphael Levi's Rechnungsmethode.

§. 31.

Wir gehen also nun zu demjenigen über, was Raphael in der **Setzung derjenigen Aufgaben** besonders hat, **worin ein wiederkehrliches Verhältniß vorhanden.** Dieses ist aber vorhanden in allen Aufgaben 1) worin von den 2 würkenden oder bestimmenden Dingen Eins unbekannt und aus dem andern und dem Bestimmten nach dem Verhältnisse zweier anderer bestimmenden Dinge, und ihrer Bestimmung zu suchen ist. Z. B. aus der Zeit und den Zinsen, das Kapital zu finden; oder aus dem Kapitale und den Zinsen die Zeit zu bestimmen. 2) worin von den 2 würkenden oder bestimmenden Dingen Eins unbekannt, und aus dem andern, nach

 dem

dem Verhältnisse zweier anderer würkenden oder bestimmenden Dinge zu suchen ist, bei beiden aber die Würkung oder Gegenstande der Bestimmung einerlei ist. Z. B. Aus dem Gewichte einer bedungenen Fracht und der Zahl der Meilen, das Gewicht bei einer Meilenzahl finden, wenn die Bezahlung einerlei bleiben soll. —

Unter den würkenden oder bestimmenden Dingen ist nicht immer Ursache und Zeit zu verstehen, sondern oft auch andere Dinge, die aber, so wie jene ein drittes würken, hervorbringen oder bestimmen. Selbst die Ausdehnung gehört hieher. Länge und Breite bestimmen die Fläche, oder wenn diese in einer andern Zahl ausgedruckt ist, dann diese andere Zahl. Wird ein Stück Leinwand von 60 Ellen lang und $\frac{3}{4}$ Ellen breit, von 40 Stück verfertiget, und man wollte aus eben den 40 Stücken Leinwand $\frac{5}{4}$ Ellen breit haben, so müßte sich die Länge ändern, aber dennoch die Fläche einerlei seyn, weil die Stückzahl des Garns dieselbe geblieben ist. — Die Beispiele von Nr. 2. sind die häufigsten.

§. 32.

Aus vorigen beiden Bemerkungen, welche die Grenzen der Regel-Inversa bestimmen, lassen sich, in Hinsicht auf die Fragen, welche sich bei den Aufgaben machen lassen, folgende 3 Fälle herleiten: Man fragt nemlich in Nr. 1.

1)

1) entweder die eine bestimmende Sache von dem Gegenstand der Bestimmung, oder

2) die andere bestimmende Sache von der ersten ebenfalls bestimmenden Sache, und in Nr. 2

3) dieses ebenfalls, nur der Gegenstand der Bestimmung ist von den in Frage seyenden Angaben, mit dem Gegenstand von den, der Frage untergelegten, Angaben gleich. Z. B. Wenn das Kapital aus den bekannten Zinsen soll bestimmet werden, so entstehet der 1te Fall; soll aber die Zeit bestimmt werden, so wird diese vom Kapitale gefragt, und nicht von den, zwar ebenfalls bekannten Zinsen, nach dem 2n Fall. — Fährt ein Fuhrmann 15 Schifpf. 21 Meilen weit, für ein gewisses Fuhrgeld, und soll nun eine andere Fracht (deren Gewicht unbekannt ist) für dasselbe Geld 14 Meilen weit fahren, so wird das Gewicht von der 14 Meilen gefragt, und kann nur davon gefragt werden, weil die Würkung nicht bekannt ist.

§. 33.

In allen diesen Fällen bleibt dennoch das §. 7. a) bemerkte Gesetz in seiner vollen Kraft, und eben die vorhin daraus gefolgerten Regel §. 9. b) in ihrer Anwendung: nur der 2te und 3te Fall (§. 31) ändert diese in etwas ab. — Ohne Umschweif gebe ich daher nur von jedem Falle ein Beispiel, um das Nö-

thi-

a) 1stes Stück. p. 47. 48.

b) Daselbst p. 50.

thige dabei sagen zu können. — Ein gewisses Kapital hat in 6 Jahren 750 Thlr. Zinsen gegeben, 5 aufs Hundert: man will das Kapital wissen. Dies ist ein Beispiel vom ersten Falle: denn man fragt hier das Kapital von den aufgebrachten Zinsen; also eines der bestimmenden Dinge, von den Gegenstand der Bestimmung. — Es fällt leicht in die Augen, daß ? Thlr. Kapital die Frage, und 750 Thlr. Zinsen die Fragezahl seyn müsse. Man setze daher diese, und fahre fort, nach der Regel §. 9, den Satz zu vollenden, so wird der Satz richtig werden, und die Verwechselung einiger Glieder wegfallen.

Er würde seyn:

? Thlr. Kapital	——	750 Zinsen
5 Thlr. Zinsen	——	100 Thlr. Kapital
1 von 100	—— ——	1 Jahr
6 Jahr	—— ——	1 Thlr. Kapital

Facit 2500 Thlr.

Dieser Satz folgt natürlich so; nur muß man bei diesen Beispielen, so wie bei allen, das zur Regel machen: Die Zahl, womit man den Kettensatz endiget, muß mit der Frage ganz gleicher Art seyn; denn sonst könnte man schließen, dieser Satz wäre mit den 100 Thlr. Kapital geschlossen, weil es so, wie die Frage Thlr. Kapital zur Benennung hat: aber es sind Thlr. eines ganz andern Kapitals, und nicht desjenigen,

wo-

wovon die Frage ist. — Dieser Fall hat also keine Schwierigkeit mehr.

§. 34.

Der andere Fall: worin man eines der bestimmenden Dinge, von dem andern fragt, mögte wohl nicht so leicht abgefertiget werden. — Wie lange müssen 2500 Thlr. auf Zinsen stehen, um davon, 5 Procent gerechnet, 750 Thlr. Zinsen gewönne? Dies ist ein Beispiel dieses Falles. Man frägt hier die Zeit von dem Kapitale, und dem ersten Anblicke nach, würde: — ? Jahre, — die Frage und — 2500 Thlr. Kapital — die Fragezahl seyn. Den Versuch, der Ausführung dieses Ansatzes, überlasse ich den Lesern, welche versuchen wollen, sie führet aber gewiß irre. — Die Frage ist ein gewisses Ganze, und die Fragezahl auch: beide aber haben die §. 7. bemerkte Eigenschaft; daß man die von der Einheit des einen Ganzen, das andere Ganze sagen kann. Hier kann ich sagen, daß 1 Thlr. von dem Kapitale 2500 Thlr. eben so lange auf Zinsen stehe, als das ganze Kapital. Die auf diese Eigenschaft §. 9. gegründete Regel müßte also auch in diesem Falle Statt finden, und das thut sie auch: ist aber bei veränderten Umständen umgekehrt anwendbar. Die Frage kann man von der Einheit der Zahl, wovon gefragt wird, so gut sagen, als von dieser Zahl selbst. Die Frage als ein Ganzes, und jene Einheit müssen daher zwei einander entgegenstehende Glieder der Kette aus-

machen. Dies kann aber nicht anders geschehen, als die Einheit der Zahl, von welcher ein anders Ganzes gefragt wird, muß die Fragezahl werden, und dann muß das Ganze jener Einheit mit dem, was von ihm gesagt wird, oder der Gegenstand der Bestimmung, die zwei folgenden Glieder der Kette seyn. Die Regel, §. 9. müßte für diesen Fall: wenn die eine bestimmende Sache von der andern gefraget wird, also in folgende verwandelt werden: **Man frägt dann von der Einheit der Zahl, von welcher man frägt, und setzt diese, mit der Würkung, oder was von ihr gesagt werden kann, als die folgenden Glieder in die Kette.** Dann nur den Regeln der gemeinen Kettenregeln, und der in §. 9. gefolgt, so wird der Satz sicher richtig werden. Unser Beispiel würde hiernach so stehen:

? Jahre	—	1 Thlr. Kap. (von dem 2500)
2500 Thl. Kap.	—	750 Thlr. Zinsen
5 Thlr. Zins.	—	100 Thlr. Kapital
1 Th. K. (v. 100)	—	1 Jahr

Facit 6 Jahre.

§. 35.

Folgendes ist ein anders Beispiel dieser Art, nur besteht die Würkung aus mehreren Bestimmungen, welche als Ausdehnungen eben so unter unsere Regel gehören. (§. 18. 7. 9.) — Man weiß aus einer ge-

mach-

machten Erfahrung, daß zwei Arbeiter einen Graben, der 12 Fuß lang 4 Fuß breit und 6 Fuß tief ist, in 1 Tage gemacht haben. Man will in demselben oder einem ähnlichen Erdboden einen Graben graben lassen, der 12 Ruthen lang, 2 Ruthen breit und 1 Ruthe tief seyn soll, und stellet 16 Arbeiter auf den Platz; in wie viel Tagen werden solche, diesen Graben gemacht haben? Noch ist hier zu merken, daß vom Körperraume die Rede ist, und daß das Verhältniß der Füße zu den Ruthen, nach der dreifachen Ausmessung eines Würfels muß in Satz gesetzt werden.

Der Satz ist:

	? Tage	—	1 Arbeiter (v. d. 8.)	
	16 Arb.	—	1 Graben	
	1 Grabe	—	12 Ruth. lg.	2ter Grabe
	1 Ruth. l.	—	2 = br.	2ter Grabe
	1 = br.	—	1 = tf.	2ter Grabe
	1 = tf.	—	16 Fuß tf.	
	1 Fuß tf.	—	16 = br.	
	1 = br.	—	16 = lang	
1ter Grabe	12 = lg.	—	1 = br.	
1ter Grabe	4 = br.	—	1 = tf.	
1ter Grabe	6 = tf.	—	1 Grabe	
	1 Grabe	—	2 Arbeiter	
	1 v. d. 2 Arb.	—	1 Tag.	

Facit $42\frac{2}{3}$ Tage.

Die Frage geschieht hier von der einen bestimmenden Sache, nemlich den Arbeitern, und weil man nun die Frage so gut von der Einheit der Zahl der Arbeiter, als von dieser Zahl selbst fragen kann, so wird die Einheit die Fragezahl, und ihr Ganzes mit dem Gegenstand der Bestimmung, (hier den 1 Graben) die folgenden Glieder der Kette. Ist dieser Anfang nur erst gemacht, so gehet es mit leichter Mühe weiter, und wäre das Zwischenverhältniß der Ruthen zu den Füssen, nach den dreien Abmessungen des Würfels (welches in Kalenberger oder Hannoversch-Maaß angesetzt ist) nicht da, so würde sich der Satz in zwei gleiche Hälften theilen, und so sich endigen, als er angefangen wäre.

Wären die Tage bekannt, und man wollte die Arbeiter suchen, so würde dieses einen ähnlichen Satz hervorbringen. Man müßte setzen:

? Mann ——— 1 Tag
$42\frac{2}{3}$ ——— 1 Graben
1 ꝛc.

weil man die Anzahl der in Frage seyende Arbeiter so gut von der ganzen Arbeitszeit, als von der Einheit derselben sagen kann. So viel Mann jeden einzelnen Tag von den $42\frac{2}{3}$ Tagen arbeiten, eben so viel arbeiten die $42\frac{2}{3}$ Tage durch: wobei, wie sich aus der Sache von selbst versteht, vorausgesetzt wird, daß sie zugleich arbeiten.

§. 36.

§. 36.

Der dritte Fall ist vom vorigen zweiten nur darin unterschieden, daß nicht zwei verschiedene, sondern zwei gleiche Gegenstände der Bestimmung vorkommen. Diese letzteren sind nun insgemein in der Aufgabe gar nicht ihrem Werthe nach angegeben, man muß sie also auch im Satze vermissen. Wahr ist es aber doch immer, der Gegenstand der Bestimmung ist ein Ganzes, also eine Einheit ihrer Art: 1 Arbeit, 1 Summe Rthlr. rc. und zwei gleiche solcher Gegenstände sind immer zwei gleiche Einheiten. Setzte man dieß dahin, wo sie nach vorigen zweiten Fall hin gehörten, so würde dieser Fall mit dem vorigen gleich seyn. Z. B. Ein Fuhrmann hat 15 Centner 21 Meilen weit für ein gewisses Geld gefahren; jezt soll er von einer andern Fracht so viel aufladen, daß er auf 14 Meilen weit eben so viel Geld lösen kann: wie viel muß er aufladen? Der Gegenstand der Bestimmung ist hier das gelösete oder verdiente Geld: denn Gewicht der Fracht und Weite des Weges bestimmen dieses. Da er nun durch beide Fuhren gleichviel lösen soll, so ist das Bestimmte gleich: im beiden Fällen aber doch 1 Summe Rthlr. diese mag so groß und klein seyn, als sie will. Man könnte also nach den vorigen Fall (§. 33.) so setzen:

? Pfund oder Cent.	——	1 Meile
14 Meil.	————	1 Summe Rthlr.
1 Sum. Rthlr.	——	21 Meilen
1	————	15 Cent.

Facit $22\frac{1}{2}$ Centner.

Denn die Frage, nemlich das Gewicht, kann man so gut von der Einheit der Meilenzahl, als von dieser selbst sagen, so viel Centner der Fuhrmann 1 Meile von den 14 Meilen fährt, eben so viel fähret er auf den ganzen 14 Meilen. Es war also 1 Meile die Fragezahl, worauf die 14 Meilen mit demjenigen, was durch die Frage, und diese 14 Meilen bestimmt wird, das ist also, die verdiente Summe Geld gegen über zu stehen kommen muß. Die Summe Geld ist aber nicht angegeben, daher könnte man dafür 1 Summe Rthlr. setzen. Eben diese 1 Summe Rthlr. wird durch andere Meilen und Centner bestimmet; darum muß diese 1 Summe wieder mit ihren Bestimmungen, gleichsam gegen das Vorige rückwärts, den Satz vollenden.

§. 37.

Ob gleich Raphael Levi in andern Umständen sich des Kunstgrifs zur Erleichterung seiner Sätze 1 Summe bedienet, und so sehr er seine Sätze durch einzelne Schlüsse und durch Einheiten zusammenkettet, so hat er es nur hier in unsern vor uns habenden Falle nicht

ge-

gethan: hier läßt er den Rechner einen Sprung thun. Er setzt nemlich voriges Exempel:

? Cent.	———	1 Meilen
14 Meil.	———	21 Meilen
1 Meil.	———	15 Centner

läßet also das, dem Werthe nach nicht bestimmte Fuhrlohn, so wie es in der Aufgabe nicht ist, ganz aus dem Satze. Er gleichet also die beiden Meilenzahlen gleichsam gegen einander aus, und man hat es sich im Setzen ohngefehr so vorzustellen: für 14 Meilen bekommt man eben so viel Fuhrlohn als für 21 Meilen. Der Satz hat dann folgenden Zusammenhang: Wie viel Centner wird 1 Meile gefahren, wenn 14 Meilen weit soviel soll verdienet werden, als für 21 Meilen, wenn 1 Meile, 15 Centner gefahren werden.

§. 38.

Ich will noch ein paar Beispiele von diesem Fall hersetzen, um zu zeigen, wie sie nach Raphaels Regel gesetzet werden: dann könnten wir leicht eine Regel daraus abstrahiren, welche uns in der Zukunft leiten kann. — Von einem Zeuge welches $2\frac{2}{3}$ Ellen breit ist, hat man $7\frac{1}{2}$ Ellen zu einem Kleide nöthig, man will es futtern mit Zeug welches nur $\frac{7}{8}$ Elle breit ist, wie viel Ellen wird man nöthig haben? Das Kleid ist der Gegenstand, welcher durch die Länge und Breite des Zeuges bestimmt wird. Das Unterfutter wird zu dem-

demselben Kleide gebraucht, muß eigentlich dieselbe Größe, der Oberfläche nach, haben, die das Oberzeug hat, und diese Oberfläche macht die Größe des Kleides aus. Das Kleid ist also in beiden Angaben der Länge und Breite der gleiche Gegenstand der Bestimmung. Uebrigens muß so lang als 1 Elle oder auch 1 Achtel Elle der Breite des Futters ist, auch die ganze Breite lang seyn, und daher kann man, wie im zweiten Falle die Frage von der Einheit der andern bestimmenden Zahl sagen, und muß daher diese Einheit die Fragezahl werden.

? Ellen lang	———	1 Elle breit
$\frac{7}{8}$ Ellen breit	———	$2\frac{2}{3}$ Ellen breit
1 Elle breit	———	$7\frac{1}{2}$ Ellen lang

Facit $22\frac{6}{7}$ Ellen.

Ein andrers Beispiel mag dieses seyn: Eine Arbeit geschah durch 6 Arbeiter in 15 Tagen; jetzt will man eine gleiche Arbeit verrichten lassen, und muß solche in 5 Tagen fertig seyn: und der Arbeiter soll täglich 10 ggr. haben, wie viel wird die Arbeit kosten? — Gewiß so viel wird sie kosten, als die Arbeiter, die jeden einzelnen Tag von den 5 Tagen arbeiten, verdienen. Weil nun hier eine und ebendieselbe Arbeit in verschiedenen Tagen geschiehet, so werden die Tage Vergleichungsweise gegen einander über gesetzet.

Der Satz ist also nach Raphael:

? Rthlr.

? Rthlr. verdienen
die Arbeiter,
welche in ——————— 1 Tag v. d. 5 Tagen arbeiten
wenn in 5 Tagen so viel als in — 15 Tagen gearbeitet wird
und 1 T. v. d. 15 T. arbeiteten — 6 Mann
und 1 Mann verdient ——— 10 ggr. täglich
24 ggr. ——————— 1 Rthlr.

Facit $7\frac{1}{2}$ Rthlr.

Dieses Beispiel ist also noch mit zwei an sich schon directe Verhältnisse verbunden: 1 Mann: 10 ggr. und 24 : 1 Rthlr.

§. 39.

Betrachten wir diese Beispiele, so wird es nicht schwer seyn, für diesen Fall (§. 35. 32.) eine Regel zu machen, welche Raphael hat geben müssen, wenn er diesen Fall besonders betrachtet hat: aber das wird er auch nicht. *) Diese Regel wäre folgende: **Wenn in einer Aufgabe, die fragenden Angaben und die bedingenden Angaben einerlei Gegenstand der**

*) Wenn es der Raum zu läßt, soll im folgenden 3ten Stücke ein Auszug aus einem Manuscripte folgen, welches Dictata von Raphael an einer seiner Schüler enthält. Es kann dieser Auszug als ein Beitrag zu dieser Abhandlung angesehen werden. Man kann ohngefehr den Ideen-Gang des Erfinders daraus abnehmen.

der Bestimmung haben, und in jenen die eine von der andern Angabe gefraget wird, so wird die bekannte Angabe der fragenden, der ihr gleichartigen Angabe der bedingenden Angaben gleichsam Vergleichungsweise gegen einander über gesetzet; übrigens nach der Regel des andern Falls (§. 33.) und der allgemeinen Regel (§. 9.) und der Kettenregel verfahren.*)

§. 40.

Wir haben nun die 3 Fälle betrachtet, und es bleibt mir nichts weiter übrig, als meinen Lesern den Beweis von Raphaels Regeln bei selbigen zu geben. Also ohne Umschweif, hier ist er. Ich gehe bis zum 13sten §. zurück, worin man bewiesen findet, daß Ursachen, Zeiten und Würkung, folgende Proportion machen

$$\frac{1}{u} : \frac{z}{w} = \frac{1}{U} : \frac{Z}{W}$$

wor-

*) Vielleicht bin ich einigen Lesern in dieser Regel; wegen der fragenden und bedingenden Angaben einer Aufgabe nicht deutlich genug; diesen wollte ich diese Anmerkung machen. — Jede Ausgabe hat zweierlei Data oder Angaben: solche von welchen man noch etwas wissen will, und diese nenne ich fragende, und solche, welche die Bedingung jener Frage ausmachen, gleichsam derselben unter gelegt werden, und diese nenne ich bedingende. In unser letzten Aufgabe war 5 Tage fragende Angabe und 6 Tage, 15 Arbeiter und 10 ggr. bedingende Angaben.

worin diese Quotienten Verhältnisse sind. Weil aber unsere Regel-Inversa, nicht immer Ursachen, Zeiten und deren Würkung zum Gegenstande hat; so wollen wir auch eine andere Bezeichnnng wählen, um des Unterschieds wegen. g und h mögen Zahlen andeuten, die sich von einander sagen lassen und beide zusammen die Zahl b würken oder bestimmen; insbesondere kann h von b gefragt werden, nicht aber g. m und n bezeichnen ein paar andere Zahlen, die d bestimmen, von einander gesagt werden können, und n insbesondere von d gefragt werden kann, aber nicht m.

Es findet nun hierbei dieselbe Proportion Statt, die §. 13. von Ursachen, Zeiten und Würkungen Statt fand, denn auch selbst die gehören mit hierher. Darnach ist alsdann

$$\frac{1}{g} : \frac{h}{b} = \frac{1}{m} : \frac{n}{d}$$

die Proportion waraus wir die Beweise zu den betrachteten drei Fallen herleiten müssen.

Im 1sten Fall fragt man nach n von d; das ist, man suchet das Verhältniß zwischen d : n. Es ist aber, wie man aus der Regel zu Findung des 4ten Proportionsgliedes weiß

$$\frac{\frac{h}{b} \times \frac{1}{m}}{\frac{1}{g}} = \frac{n}{d} \text{ oder } n : d.$$

man

man will aber nicht n : d sondern d : n haben, daher muß man beide Glieder dieser Gleichung umkehren, und so entstehet

$$\frac{\frac{1}{g}}{\frac{b}{h} \times \frac{1}{m}} = \frac{d}{n} = d : n.$$

d ist also die Fragezahl wozu man das andere Glied des Verhältnisses sucht, und dieses ist zusammengesetzet aus

$$\frac{\frac{1}{g}}{\frac{h}{b} \times \frac{1}{m}} = \frac{m}{1} \times \frac{1}{g} \times \frac{b}{h} = (m:1) \times (1:g) \times (b:h)$$

also sind (n = ?) : d
b : h
1 : g
m : 1.

die Verhältnisse, woraus der Kettensatz bestehet, und gleichsam die Form deutlich zeiget, wenn man es mit einem Beispiele des 1sten Falles, z. B. mit dem §. 32. vergleichet.

§. 41.

Der zweite Fall fordert m soll gefunden werden welches man wohl von n aber nicht von d fragen kann. m finden heißt also in der Proportion

$\frac{1}{g}$

$$\frac{1}{g} : \frac{h}{b} = \frac{1}{m} : \frac{n}{d}$$

das Verhältniß 1 : m bestimmen. In dieser Absicht ist

$$\frac{h}{b} : \frac{1}{g} = \frac{n}{d} : \frac{1}{m}$$ und nun

$$\frac{\frac{1}{g} \times \frac{n}{d}}{\frac{h}{b}} = \frac{1}{m} = 1 : m$$

also ist 1 die Fragezahl, wozu man das andere Glied des Verhältnisses sucht; und diese Einheit muß mit n gleicher Art seyn, weil m von n gefraget wird. Das Verhältniß besteht also aus

$$\frac{\frac{1}{g} \times \frac{n}{d}}{\frac{h}{b}} = \frac{1}{g} \times \frac{b}{h} \times \frac{n}{d} = (1:g) \times (b:h) \times (n:d)$$

zusammengesetzet, und

$$\begin{array}{rcl} (m = ?) & : & 1 \\ n & : & d \\ b & : & h \\ 1 & : & g. \end{array}$$

machen die Verhältnisse des Kettensatzes aus.

§. 42.

Im dritten Falle ist b = d, wofür ich daher lieber p setzen will; die Forderung ist dieselbe, wie im vorigen Falle, und daher

$$\frac{\frac{1}{g} \times \frac{n}{p}}{\frac{h}{p}} = 1 : m; \text{ Es ist aber}$$

$$\frac{\frac{1}{g} \times \frac{n}{p}}{\frac{h}{p}} = \frac{1}{g} \times \frac{\frac{n}{p}}{\frac{h}{p}} \text{ und } \frac{\frac{n}{p}}{\frac{h}{p}} = \frac{n}{h} \text{ also}$$

$$\frac{\frac{1}{g} \times \frac{n}{p}}{\frac{h}{p}} = \frac{1}{g} \times \frac{n}{h} \text{ und also sind}$$

$$\begin{array}{rcl} (m = ?) & : & 1 \\ n & : & h \\ 1 & : & g. \end{array}$$

die Verhältnisse des Kettensatzes, worin auch die Grössen n und h in Verhältniß kommen.

§. 43.

Leser, für welche diese Buchstaben Räthsel sind, mögen jetzt noch einmal den 14. 15. 16 und 17ten §. lesen, alsdenn werde ich mich um soviel kürzer fassen können, da dieser Beweis nichts mehr als eine Fortsetzung

setzung des dortigen ist, und unsre behandelten Fälle Ergänzungen der zwei hierher ausgesetzten Fälle im 15ten §. sind. Ich nehme eben das Exempel, welches §. 14. zum Grunde geleget worden ist, auch hier dazu an, und entwickle den Beweis der gezeigten Setzungsart aus der dort (§. 14.) gefundenen Proportion b, $\frac{1}{4} : \frac{100}{12} = \frac{1}{6} : \frac{4000}{720}$.

Der erste Fall fragt das Kapital von den Zinsen und folglich wird 4000 Rthlr. als nicht bekannt angenommen und dies anzudeuten, dafür x gesetzet; dann ist jene Proportion für diesen Fall

$\frac{1}{4} : \frac{100}{12} = \frac{1}{6} : \frac{x}{720}$ also nach der

Regeldetri $\dfrac{\frac{100}{12} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{x}{720} = x : 720.$

die von neuen in Proportion gesetzet $= \frac{1}{4} : \frac{100}{12} \times \frac{1}{6} = x : 720.$

weil man aber nicht das Verhältniß x : 720 sondern 720 : x, suchet so müssen die Glieder vewechselt werden $\frac{100}{12} \times \frac{1}{6} : \frac{1}{4} = 720 : x$

 folglich

folglich

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{100}{12} \times \frac{1}{6}} = 720 : x.$$

kehrt man die Quotienten $\frac{100}{12}$ und $\frac{1}{6}$ um, und multiplizirt so ist damit dividiret, also

$$\frac{6}{1} \times \frac{1}{4} \times \frac{12}{110} = 720 : x.$$

und weil diese Quotienten Verhältnisse anzeigen, so ist $(6 : 1) \times (1 : 4) \times (12 : 100) = 720 : x.$ Deutlich sieht mans also daß der Kettensatz von der Aufgabe: Wie groß muß das Kapital seyn, das in 6 Jahren 720 Zinsen bringt, wenn in 4 Jahren 12 Rthlr. Zinsen von 100 aufgebracht werden, kein anderer als dieser seyn kann:

$$\begin{array}{rcl} (x = ?) & : & 720 \\ 12 & : & 100 \\ 1 & : & 4 \\ 6 & : & 1. \end{array}$$

und vergleicht man dieß, mit dem würklichen praktischen Aufsatze, so wird der Augenschein den Beweis geben.

§. 44.

Der zweite Fall fraget die Zeit vom Kapitale, ist daher die Proportion

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} : \frac{100}{12} = \frac{1}{x} : \frac{4000}{720}$ worin man

die Glieder verwechselt $\frac{100}{12} : \frac{1}{4} = \frac{4000}{720} : \frac{1}{x}$

giebt nach der Regeldetri

$$\frac{\frac{1}{4} \times \frac{4000}{720}}{\frac{100}{12}} = \frac{1}{x}$$

das ist, mit umgekehrten Divisor

$$\frac{1}{4} \times \frac{12}{100} \times \frac{4000}{720} = \frac{1}{x} = 1 : x =$$

$$(1 : 4) \times (12 : 100) \times (4000 : 720.)$$

Man siehet also, daß die Aufgabe: Wie lange müssen 4000 Rthlr. Kapital stehen um 720 Rthlr. Zinsen zu bringen, wenn 100 in 4 Jahren 12 Rthlr. aufbringen, folgende Verhältnisse hat:

x = ?	:	1
4000	:	720
12	:	100
1	:	4.

daß hieraus der Kettensatz bestehen müsse und auch bestehet, und die Einheit die Fragezahl seyn müsse, weil man das Verhältniß der 1 zu x suchen will.

§. 45.

Im dritten Fall, worin ebenfalls nach der Zeit die Frage seyn muß, ändert sich die Aufgabe im §. 14.

darin

darin ab, daß einerlei Zinsen darin vorkommen müssen. Sie kann also so heißen: Wie lange müssen 4000 Rthlr. auf Zinsen stehen, um soviel Zinsen zu bringen, als 100 Rthlr. in 4 Jahren?

Es ist also unsre Grundproportion hiernach

$$\frac{1}{4} : \frac{100}{12} = \frac{1}{x} : \frac{4000}{12},$$

also, wie §. 43, $\frac{100}{12} : \frac{1}{4} = \frac{4000}{12} : \frac{1}{x}$

und nach der Regeldetri $\dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{4000}{12}}{\frac{100}{12}} = \frac{1}{4} \times \dfrac{\frac{4000}{12}}{\frac{100}{12}}$

Es ist aber $\dfrac{\frac{4000}{12}}{\frac{100}{12}} = \dfrac{4000 \times 12}{100 \times 12} = \dfrac{4000}{100},$

folglich kann man statt $\frac{1}{4} \times \dfrac{\frac{4000}{12}}{\frac{100}{12}}$ setzen $\frac{1}{4} \times \frac{4000}{100},$

Es ist also $\frac{1}{4} \times \frac{4000}{100} = (1 : 4) \times (4000 : 100) = 1 : x$

und daher der Satz von jener Aufgabe in Verhältnissen kettenmäßig gesetzt

$x = ?$

x = ? : 1
4000 : 100
1 : 4.

ganz so wie Raphael setzet.

§. 46.

Als einen Anhang zu den vorigen, will ich in diesem Paragraphen einige schwere und verwickeltere Aufgabe geben, und ihren Aufsatz hersetzen.

Die erste mag folgende seyn: Wie lange muß ein Kapital stehen, um zu 4 Procent eben soviel Zinsen zubringen, als ein anders zu 5 Procent in $1\frac{1}{2}$ Jahren? Diese Aufgabe gehöret zum 3ten Fall, und ihr Aufsatz ist keiner der leichtesten. Es ist hier zugleich das Kapital nicht bestimmet, und daher setzet man da wo es stehen müßte, 1 Summe Rthlr. hin.

? Jahr	—	1 Thlr. v. einer S. Thlr.
1 S. Thlr.	—	1 andere Summe Thlr.
1 Thlr. v. dies. S.	—	$1\frac{1}{2}$ Jahr
1 Jahr	—	100 Thlr. von 100 Kap.
100 Thlr.	—	5 Thlr. Zinsen
4 Thlr. Zinß	—	100 Thlr. Kap.
1 Thlr. v. 100	—	1 Jahr.

Facit $1\frac{7}{8}$ Jahr.

Der Aufsatz hat folgenden Zusammenhang: Wie viel Jahr stehet 1 Rthlr. von einer Summe Rthlr.

Kapital, wenn diese 1 Summe Rthlr. Kapital eben die Zinsen 1 andere Summe Rthlr. Kapital bringen soll, und 1 Rthlr. von dieser letzten Summe stehet $1\frac{1}{2}$ Jahr, und 1 Jahr stehet 1 Rthlr. von 100 Rthlr. Kapital, und 100 Rthlr. Kapital geben 5 Rthlr. Zinsen (nemlich bei diesem zweiten Kapitale) und 4 Rthlr. Zinsen geben 100 Rthlr. Kapital (nemlich vom ersten Kapitale) und 1 Rthlr. von 100 Rthlr. stehet 1 Jahr.

Die zwei folgenden Beispiele sind aus dem 57ten Stücke des hannöverschen Magazins vom Jahr 1778. Kol. 901 und 897. genommen. Leser, die dieses Stück nachlesen können, werden in einer nützlichen Vergleichung dieser Regel mit der dortigen Schmidschen gewiß Unterhaltung finden. Doch vielleicht machen wir in der Folge diese Vergleichung gemeinschaftlich.

"Für die $\frac{3}{4}$ jährige Zinse eines zu 4 Procent belegten Kapitals kauft man $6\frac{1}{4}$ Anker Wein, die Bouteille $7\frac{1}{2}$ mgr.; fürs Kapital kauft man Korn, den Himten zu 25 mgr.; man finde in Einem Satze, wie viel Himten man erhalten. 40 Bouteillen werden auf 1 Anker gerechnet." Hiervon ist der Aufsatz nach Raphaels Methode dieser:

? Himten

? Himten bekommt man ein Kapital für dessen Zinsen man	———	$6\frac{3}{4}$ Anker W. kauft
1 Ank.	———	40 Bout.
1 Bout.	———	$7\frac{1}{2}$ mgr.
36 mgr.	———	1 Rthlr. Zinse
4 Rthlr. Z.	———	100 Rthlr. Kapital
1 Rthlr. v. 100	———	1 Jahr
$\frac{3}{4}$ Jahr	———	1 Rthlr. vom Kap.
1 Rthlr. K.	———	36 mgr. Kap.
25 gr.	———	1 Himte.

Facit 2700 Himten.

Man sieht es deutlich, in dieser Aufgabe ist die Fragezahl so leicht nicht zu finden; man gehet erst durch zwei Schlüsse von der Frage zu derselben. Uebrigens gehöret dieses Beispiel zum ersten Fall. (§. 32.)

„Zu dem Sohne eines reichen Mannes sprach der Vater: Mein Kind! die 5 Felder, deren jedes 95 Ruthen lang und $48\frac{2}{3}$ Ruhten breit ist, sollen Dein seyn, nutze sie so gut du kanst und willst. Der Sohn verkaufte die 5 Felder, jeden Morgen zu $366\frac{2}{3}$ Rthlr.; für das gelösete Geld kaufte er Pferde; das Stück 30 Thaler; die Pferde vertauschte er gegen Schafe, 18 Schafe für 1 Pferd; die Schafe gegen Kühe, 16 Schafe für 3 Kühe; die Kühe verkauft er das Stück zu $22\frac{1}{2}$ Thaler in Gulden; die Gulden verwechselte er gegen Louisd'or, und bekam $9\frac{2}{3}$ Procent Agio; dies Kapital samt der Agio belegte er zinsbar

 zu

zu 5 Procent, die $2\frac{1}{2}$ jährige Zinse, giebt er wieder auf Zinsen jährlich zu 6 Procent. In welcher Zeit haben diese lezten Zinsen 1000 Thlr. gebracht?" — In so viel Zeit als 1 Rthlr. von der $2\frac{1}{2}$ jährigen Zinsen von dem zu 5 Procent belegten Kapital sammt dem Agio, ausstehen muß. 1 Rthlr. Zinse (welche hier aber wieder zum Kapital wird) muß also die Fragezahl des Satzes seyn, weil sich die Frage (wieviel Tage?) so gut von dem ganzen, aus Zinsen bestehenden Kapitale, als von dessen Einheit, also von 1 Rthlr. Zinsen sagen läßt. Das Beispiel gehört also zum 2ten Fall, und der Aufsatz davon ist folgender:

? Tage ——	1 Rthlr. Zinf. v. dem, aus folgenden gelöseten Kap. stehen
5 Rthlr. Zinf. ——	100 Rthlr. Kapital
1 Rthlr. Kapit. ——	1 Jahr
$2\frac{1}{2}$ Jahr ——	1 Rthlr. K. in L'dor.
$109\frac{2}{3}$ Rthlr. Ld'or. K. ——	100 Rthlr. Guld. Kap.
$22\frac{1}{2}$ Rthlr. Guld. K. ——	1 Kuh
3 Kühe ——	16 Schafe
18 Schafe ——	1 Pferd
1 Pferd ——	30 Rthlr. Kap.
$366\frac{2}{3}$ Rthlr. K. ——	1 Morgen Land
1 Morg ——	120 □ Ruthen
1 □ Ruth. ——	1 Ruthe breit
1 Ruthe br. ——	1 Ruthe lang
95 Ruthen l. ——	1 Ruthe breit
$48\frac{2}{3}$ Ruth. br. ——	1 Feld
5 Feld. ——	1000 Rthlr. Zinf. bringen
6 Rthlr. Zinf. ——	100 Rthlr. Kapital
1 Rthlr. (v. 100.) ——	360 Tage = 1 Jahr.

Facit 248 Tage $4\frac{4}{5}$ Stunden.

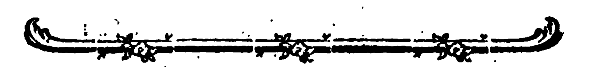
Wenn

Wenn man das, was bisher über Raphaels Regel gesagt ist gelesen und verstanden hat, so wird der Zusammenhang dieses, zwar nicht leichten, aber doch auch nicht schweren Aufsatz von selbst einsehen.

(Die Fortsetzung im folgenden Stücke.)



II. Be-



II. Beantwortung der im 1sten Stücke dieses Magazins Seite 154 befindlichen vierten Aufgabe.

Obgleich der Herr StR. Petters die Beantwortung dieser Aufgabe schon von mehrern erhalten: so glaubt' ich doch, daß es nicht ganz unnütz seyn würde, sie noch Einmal für die Wenigen zu beantworten, welche etwa dies Magazin lesen werden, jene Aufgabe nicht auflösen können, und doch gerne belehrt zu seyn wünschen. Diese Wenigen also bitte ich, mir nur eine kleine Weile Ihre Aufmerksamkeit zu schenken.

Wenn bekannt ist, wie viel nach dem 1sten Jahre, vom Capital, zu der Zinse desselben genommen wird: so ist auch leicht zu finden, wie viel in den folgenden Jahren zu der Zinse des kleiner gewordenen Capitals genommen werden muß, um dieselbe Einnahme zu genießen. Dieser Zusatz vom Capital muß nemlich um so viel größer werden, als weniger Zinse eingenommen worden, und sämmtliche Zusätze müssen am Ende des 10ten Jahrs das ganze Kapital verzehrt haben, und also demselben gleich seyn.

Am

Am Ende des 1sten Jahrs ist seine Einnahme: die Zinse von 10000 Thlr. oder 500 Thlr. und das, was er hiezu vom Kapital nimmt.

Am Ende des 2ten Jahrs erhält er so viel weniger Zinse als jener Zusatz würde eingebracht haben. Da nun die Größe seiner jährlichen Einnahme sich immer gleich seyn soll, so muß er vom kleiner gewordenen Kapital die Zinse, oder $\frac{5}{100} = 0,05$ des Zusatzes, und einen Zusatz welcher den des 1sten Jahres gleich ist, oder überhaupt $\frac{105}{100} = 1,05$ des Zusatzes des 1sten Jahres nehmen.

Am Ende des 3ten Jahrs hat er nur die Zinse von 10000 weniger dem Zusatze des 1sten Jahrs, und den, des 2ten einzunehmen. —

Er muß also vom verminderten Kapitale, außer der Größe, welche dem Zusatze des 1sten Jahrs gleich ist, noch 0,05 von diesem und 0,05 von dem Zusatze des 2ten Jahrs, also überhaupt $1,1025 = 1,05^2$ des Zusatzes des 1sten Jahres zusetzen.

Setzt man diese Betrachtungen weiter fort, so wird man finden: daß der Zusatz

des 4ten Jahrs	$1,05^3$	multiplicirt mit dem Zusatze des 1sten Jahrs.
— 5ten —	$1,05^4$	
— 6ten —	$1,05^5$	
— 7ten —	$1,05^6$	
— 8ten —	$1,05^7$	
— 9ten —	$1,05^8$	
— 10ten —	$1,05^9$	

ist.

ist. Da nun diese Zusätze eine geom. Progreßion geben, deren 1stes Glied 1 multiplicirt mit dem Zusatze des 1sten Jahrs, der Exponent 1, 05 und das letzte Glied 1, 05 in der Dignität, welche der Zahl der Jahre weniger 1 gleich ist, multiplicirt mit dem Zusatze des 1sten Jahrs; so wird deren Summe nach folgendem bekannten Satze bestimmt: **man multiplicire das letzte Glied mit dem Exponenten, subtrahire hievon das 1ste Glied, und diese Differenz dividire man durch den Exponenten weniger 1.** Dieses giebt: $\frac{1,05^{10} - 1}{1,05 - 1} = \frac{1,05^{10} - 1}{0,05}$ multiplicirt mit dem Zusatze des 1sten Jahrs.

Weil die Summe aller Zusätze dem ganzen Kapitale gleich seyn muß: so kann auch das Kapital als ein Factum aus $\frac{1,05^{10} - 1}{0,05}$ und dem Zusatze des 1sten Jahrs angesehen werden. — Und da der eine Factor gefunden wird, wenn man das Factum durch den andern dividirt: so wird auch der noch unbekannte Zusatz des 1sten Jahrs gefunden, wenn man 10000 durch $\frac{1,05^{10} - 1}{0,05}$ dividirt. —

Es ist $\frac{10000}{\frac{1,05^{10} - 1}{0,05}} = \frac{10000 \cdot 0,05}{1,05^{10} - 1} = \frac{500}{1,05^{10} - 1}$.

Dieser Ausdruck ist mit Hülfe der Logarithm. Tafeln sehr leicht aufzulösen.

Der

Der Log. von 1, 05 ist 0, 0211893. Diesen zehnmal genommen, giebt L. $1,05^{10} = 0,2118930$. Die Zahl für diesen Logarith. ist 1, 6289 also $1,05^{10} - 1 = 0,6289$. Der Zusatz des 1sten Jahrs wird nun gefunden wenn man 500 durch 0, 6289 dividirt, oder L. 0, 6289 von L. 500 subtrahirt:

$$\begin{array}{l} L.\ 500 = 2,6989700 \\ L.\ 0,6289 = 0,7985816 - 1. \\ \hline \quad 2,9003884 \end{array}$$

In den Tafeln *) findet man zu diesem Log. die Zahl 795, 04 als den Zusatz des 1sten Jahrs. Hiezu die einjährige Zinse von 10000 Thlr., oder 500 Thlr. addirt, giebt zur Summe die verlangte Antwort: 1295, 04 Thlr.

Es sey $10000 = A$, $\frac{105}{100} = \frac{100+p}{100}$, $10 = n$ und der Zusatz des 1sten $= X$; so ist die vorhin gedachte Progreßion allgemein ausgedrückt:

$$\left(1, \frac{100+p}{100}, \frac{(100+p)^2}{100^2} \dots\dots \frac{(100+p)^{n-1}}{100^{n-1}}\right) X$$

und die Summe derselben $\left(\frac{(100+p)^n}{100^n} - 1\right) \frac{100}{p} \cdot X$

Dies giebt die Gleichung: $\left(\frac{(100+p)^n}{100^n} - 1\right) \frac{100}{p} \cdot X = A$

woraus

*) Ich habe mich hierbei der vor kurzen erschienenen Vegaschen Tafeln bedient, welche sich gewiß jedem empfehlen.

woraus wird, $X = \frac{A}{\left(\frac{(100+p)^n}{100^n} - 1\right)\frac{100}{p}}$

Addirt man hierzu die Zinse von A, so erhält man zur Findung der jährl. zu verzehrenden Summe folgende Formel:

$$\frac{A}{\left(\frac{(100+p)^n}{100^n} - 1\right)\frac{100}{p}} + \frac{A}{\frac{100}{p}}$$ Diesen Ausdruck kann

man auch in $\frac{100^n \times \frac{pA}{100}}{((100+p)^n - 100^n)} + \frac{pA}{100}$ verwandeln, welcher besonders für den vortheilhafter ist, welcher nicht mit Logarithmen rechnen will oder kann.

Für diejenigen aber, welche jene Buchstabenregel nicht lesen können, will ich die letztere Formel in die deutsche Sprache übersetzen. Die jährlich zu verzehrende Summe wird gefunden: **wenn man 100 so oft mit sich selbst multiplicirt, als die Zahl der Jahre anzeigt, und das Herauskommende mit der einjährigen Zinse des Kapitals. Ferner multiplicire man die Summe von 100 und dem jährl. Procent, so oft mit sich selbst, als die Zahl der Jahre anzeigt, subtrahire hievon 100, eben so oft mit sich selbst multiplicirt, dividire diese Differenz in jenes Product, und addire zu dem Quotienten die einjährige Zinse des**

des Capitals; so erhält man das Verlangte zum Resultate.

100 zehnmal mit sich selbst multipliciret ist: = 100000000000000000000;

dies mult. mit der einjährigen Zinse des Kapitals = 500

giebt, 50000000000000000000000

105 zehnmal mit sich selbst multiplicirt = 162889462677744140625

Hievon subtrahirt 100, zehnmal mit sich selbst multiplicirt = 100000000000000000000 so

bekömmt man zur

Differenz: 62889462677744140625.

Obige 50000000000000000000000 durch diese Differenz dividirt, giebt zum Quotienten:

$795 \frac{2877171193408203125}{62889462677744140625}$ Thlr.

Hiezu $\frac{5}{100}$ von 1000 = 500 — add.;

so erhält man: $1295 \frac{2877171193408203125}{62889462677744140625}$ Thl. —

1295 Thlr. 1 ggr. 1 pf. beinahe, zur jährlich zu verzehrenden Summe.

Um sich von der Richtigkeit dieses Resultats zu überzeugen, mache man folgende natürliche Probe: man subtrahire von der Summe des Kapitals und der Zinse die jährliche Ausgabe, addire zu dem Reste die Zinse desselben, und fahre hie-

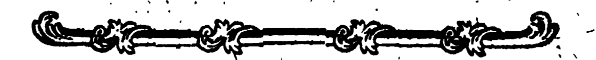
hiemit so lange fort, als die Zahl der Jahre anzeigt. Am Ende des letzten Jahrs muß 0 überbleiben, weil dann alles verzehrt oder ausgegeben seyn soll.

Weitläuftig würde diese Probe aber seyn, weil in unserer Aufgabe über die Hauptsumme noch ein Bruch überbleibt, der so wenig über 1 ggr. ausmacht; man läßt daher diesen weg, und übersieht dagegen bei der Zinse die Brüche, welche unter ½ sind, rechnet aber der Zinse 1 zu, wenn der Bruch über ½ ist.

Obige Formel könnte man noch in andere verwandeln, welche dem gemeinen Rechner Regeln geben, wie er die jährl. Ausgabe unmittelbar finde. — Durch obige, däucht mir, erreicht er aber am ersten seine Absicht.

Hannover J. G. H. Biermann.





Zusatz des Herausgebers

zur vorstehenden IIten Abhandlung, worin eine Beurtheilung der kleinen Schrift: Allgemein verständliche Auflösung verschiedener wichtigen Aufgaben der höhern praktischen Arithmetik rc. von Hrn. Pr. Michelsen, zu finden.

Der H. Verfasser des vorstehenden Aufsatzes hatte schon vor einem halben Jahre eine Beantwortung der darin beantworteten Frage eingereichet. Vor kurzen führet ihn ein Umstand zu eben dieser Beantwortung hin; und er fand nun ein unrichtiges Facit, welches in einem Schreibfehler, im Aufschreiben der Logarithmen, entstanden war. Er freuete sich, daß sich Hindernisse gefunden, welche die Herausgabe dieses 2ten Stücks aufgehalten hätten, und dadurch dieser Fehler nicht den Augen des Publikums dargelegt wäre. Vortheilhaft verbessert und umgearbeitet, liest nun darin der bloße gemeine als höhere Zahlrechner so wie der Algebraist die Auflösung dieser, gewiß wichtigen Aufgabe. —

Eben diese Aufgabe, welche (wie man auf der 153sten Seite des 1sten St. dieses Magazins sehen kann) zuerst 1783 von dem Hrn. StR. Petters ins Leipziger Wochenblatt eingeschickt ist, hat den Hrn. Professor **Michelsen** zu Berlin — einem Manne, den Leichtigkeit, verbunden mit Gründlichkeit, im Vortrage besonders auszeichnen — veranlasset, die Auflösung dieser Aufgabe in einer eigenen kleinen Schrift für diejenigen zu zeigen, welche nur den Gebrauch der 4 einfachen Rechnungsarten inne haben. Die Abhandlung hat den Titel: **Allgemein verständliche Auflösung verschiedener wichtigen Aufgaben der höhern praktischen Arithmetik, welche ihrer Brauchbarkeit ungeachtet in den gewöhnlichen Anleitungen zur Rechenkunst nicht berührt zu werden pflegen.** Berlin 1786. bey F. Maurer. (4 Bogen in 8. Preis 4 ggr.)

Ich halte es für Pflicht, meinen Lesern hier nicht allein dieses anzuzeigen, sondern Ihnen zugleich zu sagen, wie der Hr. Pr. Michelsen diese Aufgabe aufgelöset hat, da sie gleichsam eine Paralelle zu der Auflösung des vorigem Aufsatzes ist. Hr. Michelsen hat nicht allein ungleich mehr darüber gesagt, sondern auch seine Regel ist anders: freilich lassen sie sich auf einander reduciren. Mein Urtheil soll über beide gleich strenge seyn, und ich wills den Lesern überlassen, welcher Auflösung sie den Vorzug der Leichtigkeit einräumen wollen.

Der Hr. Prof. Michelsen hat seine Aufgabe in 2 Klassen eingetheilet. Die 1ste enthält solche worin

nach

nach der Summe gefragt wird, die man jährlich geben muß, um ein baar erhaltenes Kapital mit einer festgesezten Zinse in einer bestimmten Anzahl von Jahren abzutragen. Die der 2ten Klasse sind solche, worin nach der Summe gefragt wird, die man geben muß, um ein, in jährlichen Terminen und ohne Zinse, zu bezahlendes Kapital sogleich und auf einmahl abzutragen. — Eine kurze Vergleichung wird es zeigen, daß die Aufgabe, die in voriger II. Abhandlung aufgelöset ist, zu der 1sten Klasse gehöre, und daß die Aufgaben aus der 2ten Klasse das Umgekehrte der aus der 1sten Klasse sind.

In beiden Klassen setzet Hr. Michelsen den Unterschied der Procente als besondere Fälle fest, so daß Er 2 Fälle betrachtet: einen worin das terminweise abzutragende oder fällig seyende Kapital zu 5, und einen, worin es zu 4 Procent verzinset wird. Für jeden Fall findet man eine besondere Regel, und dann für jede Klasse eine Hauptregel.

1ste Klasse. 1ster Fall: wenn das terminweise abzutragende Kapital mit 5 Procent verzinset werden soll. **Regel:** „Man multiplicire 21 soviel mahl mit „sich selbst, als die Zahl der Jahre, in welchen das baar „erhaltene Kapital mit seinen Zinsen abgetragen werden soll, Einheiten hat, thue eben dies mit der Zahl „20, und suche die Differenz dieser beyden Produkte. „Ist dies geschehen, so multiplicire man das erste Produkt noch mit dem zwanzigsten Theile des gegebenen „Kapitals, und dividire das dadurch Erhaltene, durch

„die vorhin gefundene Differenz. Der Quotient „zeigt die verlangte Summe an."

Zum 2ten Fall: wenn das Terminweise abzutragende Kapital mit 4 Procent verzinset werden soll, ist eine ähnliche Regel gegeben, und man wird sie sich selbst machen können, wenn man in voriger statt 21, 26, statt 20, 25 und statt den zwanzigsten Theil den fünf und zwanzigsten setzt. (In der Abhandlung ist ein Druckfehler, und ist, statt daß 25 stehen solte, wieder 20 gesetzt.) Jeder Fall ist durch zwey völlig entwickelte Beispiele dargelegt, die ich aber hier, so wie alle folgende völlig weglassen muß. Nach einer Anmerkungen, wie man die Division ohne beträchtlichen Fehler abkürzen könne, folgt dann

Die Allgemeine Regel für die 1ste Klasse von Aufgaben. Zuerst verschiedene vorläufige Anmerkungen, worin gesagt wird, daß wenn man das Procent zu 100 addiret, und die Summe zum Zähler und 100 zum Nemer eines Bruchs macht, dieser Bruch die Veränderung anzeige, welche man mit einem Kapitale vornehmen müsse, um die Summe zu finden, zu welcher dasselbe durch die einjährige Zinse wachse; daß man diesen Bruch auf die kleinsten Zahlen brächte, und gern statt $\frac{105}{100}$. $\frac{21}{20}$ setze; daß man diese Brüche Anzeiger nenne; daß sie nach der Größe des Procents verschieden, und daß sich dann diese Anzeiger in 2 Klassen theilen lassen, nachdem der Unterschied des Zählers und Nenners entweder 1 oder mehr ist. — Die nun folgende allgemeine Regel theilt sich nach die-

diesem Unterschiede der Anzeiger eigentlich in 2 Regeln, eine für die erste Klasse und eine etwas veränderte für die andere Klasse der Anzeiger. Ich schreibe die erste Regel hier wieder völlig ab, für Leser, welche die Abhandlung nicht besitzen. Sie ist: „Man suche aus „dem gegebenen Procent den Anzeiger nach der dazu „vorhin gegebenen Anweisung; multiplicire darauf „den Zähler desselben so vielmahl mit sich selbst, als „die Zahl der Jahre, in welchen das baar erhaltene „Kapital mit seinen Zinsen abgetragen werden soll, „Einheiten hat, und thue eben dies mit dem Nenner, „und suche die Differenz der beyden erhaltenen Pro„dukte. Ist dieß geschehen: so multiplicire man das „erste Produkt mit dem gegebenen Kapitale und die „gefundene Differenz mit dem Nenner des Anzeigers, „und dividire das erstere dieser beyden Produkt durch „das leztere. Der Quotient zeigt die verlangte Sum„me an.“ — Eine folgende Anmerkung giebt eine besondere Vortheils-Regel, auf den Fall, daß der Nenner des Anzeigers in das Kapital ohne Rest sich dividiren lasse; man verändert nemlich den lezten Theil obige Regel in folgende: „Ist dieß geschehen, so multi„plicire man das erste Produkt mit dem Theile des Ka„pitals, den man durch die Division desselben durch den „Nenner des Anzeigers erhält, und dividire das dadurch „Erhaltene, durch die vorhin gefundene Differenz.“

Die Regel für die Klasse von Anzeigern, worin Zähler und Nenner um mehr als 1 unterschieden sind, ist mit der vorigen einerley, „bis auf den Umstand,

Eben diese Aufgabe, welche (wie man auf der 153sten Seite des 1sten St. dieses Magazins sehen kann) zuerst 1783 von dem Hrn. StR. Petters ins Leipziger Wochenblatt eingeschickt ist, hat den Hrn. Professor **Michelsen** zu Berlin — einem Manne, den Leichtigkeit, verbunden mit Gründlichkeit, im Vortrage besonders auszeichnen — veranlasset, die Auflösung dieser Aufgabe in einer eigenen kleinen Schrift für diejenigen zu zeigen, welche nur den Gebrauch der 4 einfachen Rechnungsarten inne haben. Die Abhandlung hat den Titel: **Allgemein verständliche Auflösung verschiedener wichtigen Aufgaben der höhern praktischen Arithmetik, welche ihrer Brauchbarkeit ungeachtet in den gewöhnlichen Anleitungen zur Rechenkunst nicht berührt zu werden pflegen.** Berlin 1786. bey F. Maurer. (4 Bogen in 8. Preis 4 ggr.)

Ich halte es für Pflicht, meinen Lesern hier nicht allein dieses anzuzeigen, sondern Ihnen zugleich zu sagen, wie der Hr. Pr. Michelsen diese Aufgabe aufgelöset hat, da sie gleichsam eine Paralelle zu der Auflösung des vorigem Aufsatzes ist. Hr. Michelsen hat nicht allein ungleich mehr darüber gesagt, sondern auch seine Regel ist anders: freilich lassen sie sich auf einander reduciren. Mein Urtheil soll über beide gleich strenge seyn, und ich wills den Lesern überlassen, welcher Auflösung sie den Vorzug der Leichtigkeit einräumen wollen.

Der Hr. Prof. Michelsen hat seine Aufgabe in 2 Klassen eingetheilet. Die 1ste enthält solche worin

nach

nach der Summe gefragt wird, die man jährlich geben muß, um ein baar erhaltenes Kapital mit einer festgesezten Zinse in einer bestimmten Anzahl von Jahren abzutragen. Die der 2ten Klasse sind solche, worin nach der Summe gefragt wird, die man geben muß, um ein, in jährlichen Terminen und ohne Zinse, zu bezahlendes Kapital sogleich und auf einmahl abzutragen. — Eine kurze Vergleichung wird es zeigen, daß die Aufgabe, die in voriger II. Abhandlung aufgelöset ist, zu der 1sten Klasse gehöre, und daß die Aufgaben aus der 2ten Klasse das Umgekehrte der aus der 1sten Klasse sind.

In beiden Klassen setzet Hr. Michelsen den Unterschied der Procente als besondere Fälle fest, so daß Er 2 Fälle betrachtet: einen worin das terminweise abzutragende oder fällig seyende Kapital zu 5, und einen, worin es zu 4 Procent verzinset wird. Für jeden Fall findet man eine besondere Regel, und dann für jede Klasse eine Hauptregel.

1ste Klasse. 1ster Fall: wenn das terminweise abzutragende Kapital mit 5 Procent verzinset werden soll. Regel: „Man multiplicire 21 soviel mahl mit „sich selbst, als die Zahl der Jahre, in welchen das baar „erhaltene Kapital mit seinen Zinsen abgetragen wer„den soll, Einheiten hat, thue eben dies mit der Zahl „20, und suche die Differenz dieser beyden Produkte. „Ist dies geschehen, so multiplicire man das erste Pro„dukt noch mit dem zwanzigsten Theile des gegebenen „Kapitals, und dividire das dadurch Erhaltene, durch

 „die

„die vorhin gefundene Differenz. Der Quotient
„zeigt die verlangte Summe an."

Zum 2ten Fall: wenn das Terminweise abzu-
tragende Kapital mit 4 Procent verzinset werden soll,
ist eine ähnliche Regel gegeben, und man wird sie sich
selbst machen können, wenn man in voriger statt 21,
26; statt 20, 25 und statt den zwanzigsten Theil den
fünf und zwanzigsten setzt. (In der Abhandlung ist
ein Druckfehler, und ist, statt daß 25 stehen solte,
wieder 20 gesetzt.) Jeder Fall ist durch zwey völlig
entwickelte Beispiele dargelegt, die ich aber hier, so
wie alle folgende völlig weglassen muß. Nach einer
Anmerkungen, wie man die Division, ohne beträcht-
lichen Fehler abkürzen könne, folgt dann

Die **Allgemeine Regel** für die 1ste Klasse von
Aufgaben. **Zuerst verschiedene vorläufige An-
merkungen,** worin gesagt wird, daß wenn man das
Procent zu 100 addiret, und die Summe zum Zähler
und 100 zum Nemer eines Bruchs macht, dieser
Bruch die Veränderung anzeige, welche man mit ei-
nem Kapitale vornehmen müsse, um die Summe zu
finden, zu welcher dasselbe durch die einjährige Zinse
wachse; daß man diesen Bruch auf die kleinsten Zahlen
brächte, und gern statt $\frac{105}{100}$ $\frac{21}{20}$ setze; daß man diese
Brüche Anzeiger nenne; daß sie nach der Größe des
Procents verschieden, und daß sich dann diese Anzeiger
in 2 Klassen theilen lassen, nachdem der Unterschied
des Zählers und Nenners entweder 1 oder mehr ist. —
Die nun folgende **allgemeine Regel** theilt sich nach
die-

Der Anzeiger ist hier $\frac{104}{100}$; also multiplizirt man 104 10 mal mit sich selbst

Anmerkung: 100, 4 mal mit sich selbst multiplizirt, würde 100000000 geben, welche vom nebenstehenden Produkte abgezogen, zur Differenz, giebt, womit hier dividirt wird. Diese Differenz findet man aber auch, wenn man von obigen Produkte der 104, die erste Ziffer 1 wegnimmt. — Das Produkt ist mit 40, als dem Produkt aus $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ mit 100, multiplizirt.

```
                    104 mal 104
                    416
           2 mal,   10816
                    43264
           3 mal,   1124864
                    4499456
           4 mal    116985856
                           40
         16985856)  4679434240 | 275 th.
                    33971712
                    128226304
                    118900992
                     93253120
                     84929280
                      8323840
                           24
                     33295360
                     16647680
         16985856)  199772160 | 11 ggr.
                    16985856
                     29913600
                     16985856
                    { 12927744
                    {           (12
                    { 25855488
         16985856)  155132928 | 9 pf.
                    152872704
                      2260224
```

Diese

„daß man den zulezt gefundenen Quotienten noch mit
„der Differenz zwischen dem Zähler und Nenner des
„Anzeigers multipliciret.“

So sehr ich ein Freund der Schriften des Hrn. Prof. Michelsen bin, so kann ich dennoch nicht das Geständniß unterdrücken, daß hier äußerst viel unnütze Weitläuftigkeit herrscht. Wozu die besondern Regeln, wenn eine Allgemeine sie überflüßig macht? und selbst diese doch noch auf Fälle beschränkt, und folglich nicht allgemein ist. — Sonderbar ist es, da Hr. Michelsen so sehr auf Vortheile sieht, daß Er sie hier nicht beobachtet hat. Es ist wahr, das Wort Vortheil ist in der Rechenkunst oft sehr schwankend, oft sehr bedingend das, was es bezeichnen soll, — nur hier nicht. Hr. Michelsen wurde aber grade dadurch, daß er Vortheile suchte, weitläuftig, und weil er das Leichte übersah, schwer. Alles liegt nämlich darin, daß die Anzeiger $\frac{185}{100}$, $\frac{184}{100}$ ꝛc. aufgehoben, und in kleinern Zahlen gebraucht sind. Und war wahrer Vortheil dabei? Einzig bei $\frac{105}{100}$ mögte ichs zugeben können, bei allen andern Anzeigern nicht. Mit 105 multipliciret, ist eben so, wie bei 21 nichts weiter, als eine würkliche Multiplikation dort mit 5 hier mit 2 und ein einmahliges Hinschreiben des Multiplikandus. Ich räume ein, daß mit 2 leichter, wie mit 5 zu multipliciren seyn kann, beträchtlich gewiß aber nicht, weil 5 mahl jede grade Ziffer eine runde Zehnerzahl giebt, womit sich sehr leicht rechnen läßt. Freilich hat man bei der Multiplikation der 105 mit sich selbst mehr Ziffern, und

also

also eine weitläuftigere Multiplikation, aber dagegen hat man folgenden doppelten Vortheil: einmahl ist die Multiplikation der 100 noch soviel mit sich selbst, nichts weiter, als ein bloßes Beischreiben von so viel mahl 2 Nullen, als diese Multiplikation geschehen soll weniger 1 mahl: und wie leicht ist das! Ferner ist, um die Differenz der beiden Produkte von 105 und 100 gewisse mahl mit sich selbst multiplicirt, zu finden, eigentlich keine Subtraction nöthig, sondern die Differenz derselben findet man, wenn man die forderste Ziffer des Produkts aus 105 wegnimt. Also völliger Ersatz für jene kleine Weitläuftigkeit. — Eben diese Vortheile gewähren die Anzeiger alle, wenn mit ihnen unverändert gerechnet wird, selbst bey gebrochenen Procenten. Verkleinert man nun die Anzeiger nicht, so hat auch der Unterschied des Nenners und Zählers keinen Einfluß in die Rechnung; man kann also eine allgemeine Regel geben, die stets die bequemste bleibt, ohne sie wieder nach besondern Fällen abzuändern. Hr. Michelsen seine Auflösung dieser Art Aufgaben könnte also ohngefähr folgende **allgemeine Regel** haben, wenn vorher gesagt wäre, wie Anzeiger entstehen: Man multiplicire den Zähler soviel mahl mit sich selbst, als die Zahl der Jahre, in welchen das baar erhaltene Kapital mit der Zinse abgetragen werden soll, Einheiten hat. Ist der Nenner des Anzeigers 100, so nehme man von diesem Produkte des Zählers die vorderste Ziffer weg; ist es eine andere Zahl so multiplicire man diese eben so wie den Zähler, und subtra-

 hire

hire das Kommende von jenem Produkte des Zählers. Ist dieß geschehen, so multiplicire man das Kapital mit einem Bruche welcher das Procent zum Zähler und 100 zum Nenner hat, und das kommende Produkt, mit dem obigen Produkte des Zählers des Anzeigers. Das dann entstehende Produkt dividire man, wenn der Nenner des Anzeigers 100 ist, mit der Zahl der übrigen Ziffern welche nach dem Hinwegnehmen der ersten bleiben, ist aber der Nenner eine andere Zahl, dann mit jener Differenz die nach der Subtraktion der Produkte blieb: der Quotient giebt die verlangte Summe.

Ließe man dieser Regel in einigen Anmerkungen für die Ungeübten dasjenige folgen, was das Verfahren in den mehrsten Fällen erleichtert, und was die Regel selbst erklärt, (wie in unser vorhabenden Abhandlung Seite 8, 16, 24, 28.) und machte alles mit einigen Exempeln deutlich, so würde man auf der Hälfte Raum mehr deutliches, dem gemeinen Rechner leichter anzuwendendes gesagt haben, als Hr. M. in vielen Regeln auf 24 Seiten gesagt hat. Zum Ueberfluß, blos auch mit den Augenschein zu überzeugen, setze ich eine Berechnung des 1sten Exempels S. 18. nach letzterer Regel her: der Leser mag vergleichen. Es heißt:

„Es soll jemand jetzt baar erhaltene 1000 Thlr. in 10 auf einander folgenden Jahren, mit ihren Zinsen zu 4 Procent, und in gleichen Summen wieder bezahlen; und es wird gefragt, wie viel er jedesmal abtragen muß„.

Der

Der Anzeiger ist hier $\frac{4}{100}$; also multiplizirt man 104 10 mal mit sich selbst

Anmerkung: 100, 4 mal mit sich selbst multiplizirt, würde 100000000 geben, welche vom nebenstehenden Produkte abgezogen, ... 16985856 zur Differenz, giebt, womit hier dividirt wird. Diese Differenz findet man aber auch, wenn man von obigen Produkte der 104, die erste Ziffer 1 wegnimmt. — Das Produkt ist mit 40, als dem Produkt aus $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ mit 100, multiplizirt.

```
               104 mal 104
                416
       2 mal,  10816
                43264
       3 mal,  1124864
                4499456
       4 mal  116985856
                      40
16985856)  4679434240 | 275 th.
            33971712
           128226304
           118900992
            93253120
            84929280
             8323840
                  24
            33295360
            16647680
16985856)  199772160 | 11 ggr.
            16985856
            29913600
            16985856
          { 12927744
          {             (12
          { 25855488
16985856)  155132928 | 9 pf.
           152872794
             2260224
```

Diese

Diese Auflösung ist mit eben der Weitläuftigkeit, und mit nicht angewandten, bekannten Vortheilen, berechnet, wie es der Herr Prof. gethan hat. Freilich ist es sonderbar, so aufzulösen, da er doch in der Folge (S. 39.) von seinen Lesern, welsche Praktik voraussetzet. Die Arbeit wird beträchtlich vermindert, wenn man gleich oben das Produkt und den Divisor verkleinert; welches sich in den mehrsten Fällen wird thun lassen. Und dieses Verkleinern hätte doch wohl, für einige Leser eine Anmerkung verdienet.

Ist die Zahl des Kapitals eine solche Zahl, welche nicht mit 2 und 5 ohne Rest theilbar ist, so wird die Multiplikation desselben mit dem Bruche, der das Procent zum Zähler, und 100 zum Nenner hat, eine vermischte Zahl geben, und wie man, ohne einmal zu probiren, leicht denken kann, die Multiplikation dieser Zahl, mit dem Produkte des Zählers, des Anzeigers in sich selbst, gewiß mühsam und weitläuftig seyn. Schon dann ist es das, wenn zwar die Multiplikation des Kapitals mit jenem Bruche, blos eine ganze Zahl, aber keine mit einer Ziffer und angehängten Nullen giebt.

Die Regel, welche der Hr. Verf. der 2ten Abhandlung davon gegeben, hat eben die Vorbereitung, wie die, des H. Pr. M.: man muß ebenfalls den Zähler und Nenner des Anzeigers so oft mit sich selbst multipliziren, als Jahre gegeben sind, worin das Kapital abgetragen werden soll, und auch die Differenz dieser Produkte suchen. Diese Differenz findet

man

man, wenn man die Anzeiger nicht verkleinert, wie ich vorhin gesagt habe, aus dem Produkte des Zählers in sich selbst, ganz, ohne Mühe: und also hat man dazu nur das Produkt des Zählers zu suchen. Das Produkt des Nenner, 100 etlichemal in sich selbst, bedarf nur die Anhängung so viel paar Nullen, als Jahre gegeben sind, weniger 1 Jahr: und das ist sehr leicht. Auch die einjährige Zinse muß man hier, wie dort suchen: nemlich, wenn man das Kapital mit einem Bruche, dessen Zähler das Procent und 100 der Nenner ist, multipliziret. Nun aber weichet die Regel von Michelsen seiner vortheilhaft ab. Michelsen multipliziret das Produkt aus 100 und dem Procent mit der einjährigen Zinse des Kapitals, (welches, wie vorhin schon bemerkt worden, oft mühsam und Weitläuftigkeit ist) Biermann hingegen das Produkt aus 100 mit der einjährigen Zinse, welches bloßes Beischreiben der Nullen an die Zahl der Zinse ist: also sehr leicht. Dieses dann entstehende Produkt dividiret Er mit obiger Differenz, wie Hr. M. Das was heraus kommt ist aber nun nicht gleich die jährliche Summe, sondern erst der Zusatz vom Kapitale im ersten Jahre, welcher zu der einfachen einjährigen Zinse addiret werden muß; dadurch wird eigentlich der Betrag der abzutragenden oder zu verzehrenden Summe im ersten Jahre gefunden: aber die Summe ist sich alle Jahre gleich, und also dies die Antwort für alle Jahre. In Hrn. Biermanns Regel muß also zu obigem Quotienten die schon gefundene einjährige Zinse

addiret

addiret werden, um die Summe zu erlangen, welche H. M. ohne Addition unmittelbar erhält.

Um auch hier, durch den Augenschein mit zu überzeugen, will ich obiges schon berechnete Beispiel aus der Michelsensch. Abhandlung auch wieder ganz nach Biermannischer Art berechnen.

```
104                  100000000
 416    mit                       40 = 1000 mal 4/100 = 1/25
---------                                 multiplizirt
10816
 43264
---------           ------------------------------
1124864              4000000000  | 235 rthl.
 4499456             33971712    |  40  :    einjähr.
---------           ------------
116985856)           6.0.28.288.0 ------------
Differenz             50 95 7568  275 rthl. | Zinse
                    ------------
                      9.3.25.3.1.20
                      8 4 92 9 2 80
                    ------------
                       8 32 3 8 40
                              24 mal
                    ------------
                       3 32 95 3 6
                      16 6 47 6 8
                    ------------
        16985856)     19.9.77.2.160 | 11 ggr.
                      16 9 85 8 56  |
                    ------------
                      29.9.1.3.6.00
                      16 9 8 5 8 56
                    ------------
                      12 9 2 7 7 44 ) 12 mal
                       2 5 8 5 5 88 )
                    ------------
        16985856)     15 5.1.3 2 92 8 | 9 pf.
                      15 2 8 7 2 70 4 |
                    ------------
               Rest.   2 2 6 0 2 2 4
```

Hier ist auch, wie vorhin, ohne allen beträchtlichen Vortheil gerechnet, um desto besser vergleichen zu können.

H.

H. Biermanns Formel

$$\frac{100^n \times \left(\frac{p}{100} \times A\right)}{(100+p)^n - 100^n} + \frac{p}{100} \times A$$

läßt sich, wenn man sie unter einerley Nenner bringt, sehr leicht in diejenige verwandeln, welche Michelsen's Regel bezeichnet (nemlich die, nach der gemachten Verbesserung).

$$\frac{(100+p)^n \times \left(\frac{p}{100} \times A\right)}{(100+p)^n - 100^n}$$

Diese Formel sieht einfacher aus, wie die obige, aber in der Reduktion in Zahlen, ist sie schwerer als erstere. Dennoch ist ersterer, wegen des Umstandes: wenn das Kapital keine runde Zahl Thlr. zur jährlichen Zinse giebt, und daher dann auch in dieser Formel noch die Multiplikation weitläuftig ausfallen muß — noch zu verbessern möglich. Man setze

für $100^n \times \left(\frac{p}{100} \times A\right)$ folgendes ihm gleiches

$100^{n-1} \times p\,A$, so hat man

$$X = \frac{100^{n-1} \times p\,A}{(100+p)^n - 100^n} + \left(\frac{p}{100} \times A.\right)$$

welche folgende praktische Regel giebt:

1) Man hänge an 100 soviel paar Nullen, als Jahre gegeben sind, weniger 2 Jahr; auch multiplizire man das Kapital mit dem Procente, und multiplizire dann die beyden Zahlen mit einander.

2)

2) Man addirt das Procent zu 100, und multipliziret die Summe so oft in selbst, als Jahre gegeben sind; nimmt die vorderste Ziffer davon weg, und dividirt mit den übrigen Ziffern das letzte Produkt aus Nr. 1.

3) Zu dem Quotienten addire man die einjährigen Zinsen des Kapitals, so erhält man die Summe des jährlichen Abtrags.

Ich eile wieder zu meiner Beurtheilung der Michelsenschen Abhandlung hin, wo noch die zweyte Art Aufgaben übrig ist; welche aber nicht die vorige Umständlichkeit erfordern, und außerdem außer den Grenzen meiner eigentlichen Absicht liegen.

Auch hier hat jeder besondere Fall, wenn nemlich das terminweise fällige Kapital zu 5 oder zu 4 Procent genutzt werden kann, seine **besondere Regel.** Ich will sie hier nicht abschreiben, denn meine Leser können sie selbst machen, wenn Sie den zweiten Theil der Regel für den ersten Fall der vorigen Art Aufgaben in folgendes verwandeln: „Ist dieses geschehen, so multiplizire man mit dieser Differenz die jährlich fällige Summe, und dann das Product mit 20, dividire das kommende durch das anfänglich aus 21 gefundene Product." Für den 2ten Fall verwandeln Sie nur in der für den 1sten Fall 20 in 25, und 21 in 26, so ist auch die Regel für selbige da. Die **Allgemeine Regel** trennt sich wieder in zwey besondere, nach dem Unterschiede des Zählers und Nenners der Anzeiger. Ist dieser Unterschied nur 1, so bleibt obige

Regel

Regel für den 1sten Fall, wenn man statt 20, den Nenner, und statt 21 den Zähler setzet. Ist er größer als Eins, so dividiret man noch das Erhaltene durch diesen Unterschied.

Hier, so wie vorhin, würde alle diese Weitläuftigkeit wegfallen, wenn eine, in allen Fällen bequeme, allgemeine Regel gegeben wäre. Ich würde folgende gegeben haben.

1) Man addire das Procent zu 100, und multiplizire die Summe so oft in sich selbst, als Jahre gegeben sind.
2) Mit dem Produkte nehme man folgendes vor: Zuerst nehme man die erste Ziffer davon weg, und setze 2 Nullen hinten daran. Zweitens multiplizire man es ohne verändert mit dem Procente.
3) Jenes veränderte Produkt multiplizire man nun mit der jährlich fälligen Summe, und dividire das kommende mit dem letzten Produkte aus Nr. 2. der Quotient giebt das gleich zu bezahlende Kapital.

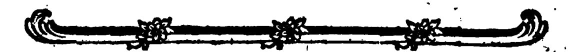
Diese Regel ist eine wörtliche Uebersetzung, für den bloß praktischen Rechner, von folgender Formel:

$$A = \frac{\left((100 + p)^n - 100^n\right) 100\, x}{p\,(100 + p)^n}$$

welche sich gleich natürlich aus Hr. Biermann's seiner, als der, die Hr. Michelsen's Regel zu der ersten Art Aufgaben bezeichnet herleiten läßt.

Auf Beweislichkeit muß der blosse gemeine Zahlrechner, sowohl bey Hr. Michelsen's Abhandlung, als bey dieser meiner Abhandlung, Verzicht thun. Diese für diesen zu erlangen ist allerdings nicht leicht: doch hätte eine 4 Bogen starke Abhandlung sie völlig enthalten können, 'wenn Hr. Michelsen nicht gewußt hätte, mit leichterer Mühe, den Raum auszufüllen — ein Fehler der den übrigen neuesten Schriften dieses würklich guten Schriftstellers immer mehr scheint eigen zu werden. Doch davon folgt der Beweis wohl ein ander Mahl. — Am Ende unser vor uns habenden Abhandlungen sind noch einige Anmerkungen hinzugefügt, deren Hauptinhalt hier nur noch Platz haben kann. Sie enthalten zuerst eine Erzählung der Fälle, in welchen die betrachteten Aufgaben im Leben anwendbar sind, welchen noch einige mehrere hätten hinzugefügt werden können; dann einige angeführte Brücher, worin die Aufgaben auch betrachtet sind; dann eine Tabelle, welche zeigt, wie viel man geben muß, um um verschiedene Jahre nach einander (von 1 bis 50) 10000 Rthlr. zu erhalten, bey 5, 4 und 3 Procent. Diese nimmt 3 Blätter ein, ohngeachtet sie auf einem Blate Raum genug gehabt hätte. Dann folgt der Gebrauch dieser Tabelle zu Berechnung der Aufgaben, die in der Abhandlung vorgetragen sind.

III. Von



III. Von den Logarithmen, ihre Entstehung und besonders ihren Anwendungen in der Rechenkunst, für den blossen Zahlenrechner.

„Wem Dezimalrechnung, Buchstabenrechnung, gründliche Kenntniß der Logarithmen, fehlen, dessen Arithmetik ist von einer zulänglichen pracktischen Brauchbarkeit noch soweit entfernt, als der Amerikaner von der Regeldetri, der eine Zahl die über zwanzig geht, nur durch eine Hand voll Haare angeben kann.

Kästner.

§. 1.

Nutzen und Nothwendigkeit der Logarithmen, bisherige Unwissenheit darin.

Es sind nun schon beinahe zweihundert Jahr, daß die Mathematiker sich in ihren Berechnungen, eines Vortheils bedienen, welcher ihnen Mühe und Zeit abkürzt, und wenn sie die Folgen ihrer Rechnungen gefunden haben, leztere selbst oft bis zum Kinderspiel erleichtert. Aber auch zu bedauren ists, daß dieser Vortheil, so wie noch mehrere andere, beinahe allein für ihn Vortheil geblieben ist: da doch der gemeine

 Rech-

Rechner noch immer über die schwere Mühe, über lange Zeit seufzt, die oft seine Rechnungen erfordern, und nach jeder neuen Regel hascht, die für eine Erleichterung seiner Mühe oder Verkürzung seiner Zeit angepriesen wird. Er greift nach Tabellen, worin ein anderer ihm vorgerechnet hat, und erkauft sich oft durch den Gebrauch derselben die etwas wenigere Anstrengung des Kopfes mit einer doppelten Zeit die er zum Suchen verschwenden muß; und in der Folge wird er, wenn ihm das Unglück trift, daß er ohne seinen Rechenknecht rechnen soll, Trägheit und Vergessenheit gewahr. Wenn er sich nur umsehen wollte in dem Gebiete seiner Wissenschaft, er würde Zahlen kennen lernen, die sich Logarithmen betiteln, welche ihrer Natur nach das Vermögen haben, seinen Wunsch sowohl in Ansehung der Mühe als der Zeit zu befriedigen, aber unter der Bedingung daß er sie richtig und nach Gründen zu gebrauchen wisse. — Die Frage: woher mag's kommen, daß diese Zahlen und ihr Nutzen noch so wenig bekannt ist? ist, wie mich dünkt, leicht zu beantworten. Die Anweisungen zur Rechenkunst die eigentlich für den gemeinen Rechner geschrieben sind, handeln Logarithmen gar nicht ab, und in Gymnasien, Lyceum und Stadtschulen ist der Unterricht in der Rechenkunst größtentheils noch gar zu mangelhaft, als daß Logarithmen darin gelehret werden könnten. Noch jetzt — wer sollt's glauben, da über den Schulunterricht so viel geschrieben wird — noch

jetzt,

jetzt, erschienen Rechenbücher, die nur Vorrathkammern von Exempeln sind, und Falsi und Cözi nach alten Leisten bearbeitet, Sonntagsbuchstaben und Sonnenzirkel, magische Quadrate und Uhrzahlen auskramen, ohne auf Nutzen und Gebrauch, ohne auf die Leser zu sehen, für welche sie bestimmt seyn sollen. Noch jetzt giebts Lehrer der Rechenkunst in den Schulen, welche ihren Schülern ihr arithmetisch Schulbuch, vorlegen und Auflösungen nach ihren, in ihrer Jugend eingeschriebenen Exempelbuche hübsch fein ausschreiben lassen, und wenn alle obige genannte Sächelchen auch darin seyn sollten, welche oft der Lehrer so wenig als seine Schüler verstehet, das thut nichts; der Schüler bekommt doch ein dikkes Buch voll Exempel, behält aber einen desto leerern Kopf. — O, schriftliche oder mündliche Lehrer, erkennt doch einmal die Wichtigkeit eures Gegenstandes; sehet doch auf Bedürfniß und wahren Nutzen; verlaßt doch einmahl die handwerksmäßige Bahn euer Lehrer, und denkt selbst; schon habt ihr gute Muster, ahmt nur nach!

§. 2.

Fortsetzung. Was der Verfasser von den Lesern voraussetzt.

Jeder der zu rechnen nöthig hat, wünscht auch die Mittel zu kennen, die seine Arbeit erleichtern; und unter diesen Mitteln verdienen die Logarithmen das Vorrecht. Die Kenntniß derselben und ihr Gebrauch

muß also mehreren Klassen des Publikums interessiren. Die Wichtigkeit des Nutzens hätte schon lange einen Arithmetiker bewegen sollen, die Lehre von den Logarithmen für bloß gemeine Rechner abzuhandeln, welches aber, soviel mir bekannt, nicht geschehen ist. Ich wage es, diese Lehre in dieser Hinsicht auszuarbeiten; vielleicht glückt' es mir, einige von der Beschaffenheit und den Nutzen dieser Hülfszahlen zu überzeugen; vielleicht dankt es mir der Geschäftsmann und der Kaufmann, daß ich ihm den Weg zeigte, wie er mit weniger Mühe und Zeit seine Reihe von Kalkulationen vollbringt; vielleicht ermuntere ich hie und da einen Lehrer dazu, diesen Schritt weiter zu gehen, als seine Vorfahren und Schüler, den Zeit und demnächstige Bestimmung es möglich und nothwendig machen, auch dieß Erleichterungsmittel ihrer arithmetischen Arbeiten zu lehren: wenigstens ist es mein Wunsch und meine Absicht es zu thun. — Aber wie, — wird man mir entgegen rufen — wie ist ein gemeiner Rechner zu Logarithmen fähig, da die Kenntniß von ganzen Zahlen, Brüchen und Regeldetri oft alles ist, was man von ihm fodern kann? wie ist der zu einer Lehre fähig, die Kenntnisse von Proportionen, Progression, und noch mehr, als was in die gemeine Rechenkunst gehört, voraussetzt? — Freilich, Rechner von leerem Kopfe werden nichts lernen, was Ueberlegung erfordert: aber dürfte man nur bei denselben, die Kenntniß von ganzen Zahlen, den Brüchen und der Regel-

detri

detri **gründlich** voraussetzen, so könnte man zur Erlernung der Logarithmen leicht rathen, aber auch das darf man nicht. Ich werde es ihnen daher aus den ersten Gründen, aus Multiplikation und Division zu entwickeln suchen: aber freilich muß ich eine bessere, als gemeine Schulkenntniß von ganzen Zahlen und Brüchen voraussetzen dürfen, und demnächst in der Anwendung setze ich noch mehr voraus: nichts mehr aber als was man von einem bloßen Zahlenrechner fodern kann. Außerdem muß ich dem Verstande meiner Leser, für die ich eigentlich schreibe, zwei Forderungen machen, wenn es anders möglich seyn soll, die Hülfszahlen, die wir uns bekannt machen wollen, gründlich zu verstehen und richtig zu gebrauchen: **Kenntniß von Decimalbrüchen und von entgegengesetzten Zahlen** — gewiß Foderungen, die man den mehrsten **deutschen** 1) Rechnern nicht machen darf. Diesen nun, und also den mehrsten, sah ich mich gezwungen, mit diesen beiden Vorkenntnissen erst bekannt zu machen, ehe ich zu Logarithmen selbst und deren Gebrauch fortgehen durfte.

1) Der **Engländische** Rechner ist, was die Decimalbrüche betrift, vor den deutschen voraus; denn in allen ihren Anweisungen zur Rechenkunst machen Decimalbrüche einen beträchtlichen Theil aus, und aufs vortheilhafteste werden sie auf Leibreiten Tontinen, Zinsen ꝛc. angewandt, welche Rechnungen denn auch ein großer Theil ge-

gemeiner Rechner in Engelland weiß; wenigstens kennen die mehrsten Decimalbrüche: warum denn nicht der Deutsche?

§. 3.

Plan der Ausführung. Etwas zur Aufmunterung.

Hieraus wird man meine Ausführung gerechtfertigt finden. Zuerst werde ich nemlich in der **Vorbereitung** die Vorkenntnissen lehren, welche ich von den wenigsten gemeinen Rechnern voraussetzen mußte: **Kenntniß von Decimalbrüchen und Begriffe von entgegengesetzten Zahlen.** Dann dadurch vorbereitet werde ich zu den **Logarithmen selbst** gehen, den Begriff derselben, ihre Eigenschaften, und die Entstehung der jetzigen in den Tafeln befindlichen zeigen. Dann von dem **Gebrauche der Tafeln überhaupt** reden, und endlich die **Anwendung der Logarithmen** auf die verschiedenen Rechnungsarten in der Rechenkunst, die so zur Theorie gehören, als auch die, so die Anwendung im Leben erfodern. Hierdurch denke ich meinen vorhabenden Zweck zu erreichen. Der möglichen Deutlichkeit werde ich mich zu befleißigen suchen, so wie den Grad von Beweislichkeit, den bloß Zahlen und nicht übertriebene Weitläuftigkeit erreichen lassen. Jedes Geschäft im Leben, soll es zweckmäßig ausgerichtet werden, erfodert gesunden Menschenverstand, und mehr diese Lehre auch

nicht;

nicht; freilich bei manchen Geschäft ist nur Kenntniß des Schlendrians nöthig: nun lerne erst Logarithmen kennen, dann ist ihr Gebrauch den Schlendrian eben nicht unähnlich. — Also, fordert dein Beruf vieles Rechnen und suchst du Mittel, es dir zu erleichtern; nun so widme einige von den Stunden deiner Musse zu Erlernung dieser Lehre, du wirst deine Wünsche befriedigt finden. Und du Jüngling! gehe still in die Einsamkeit, lies, denke, untersuche, übe dich, du wirst auch hierin das Vergnügen empfinden, das in der Brust eines jeden auflodert, welcher sich's bewußt ist, seine Kenntniß erweitert, sich dadurch vervollkommt zu haben, um künftig seinen Beruf leichter, folglich treuer verrichten zu können. Wünschest du künftig auch Selbstgenuß, frohe Stunden, keine Klage über langweilige Arbeit und überhäufte Geschäfte, so suche jedes Mittel auf, die deine Arbeit erleichtern können, und also auch dieß; und empfindest du darin Vergnügen, mehr als deine Mitbrüder zu wissen; so wirst du auch dieß hier finden. —

Vorbereitung.

I. Von den Decimalbrüchen.

§. 4.

Was ist ganz, eine ganze Zahl, ein Bruch?

Ganz nennt man das, was keine Theile hat, oder bei welchem man keine betrachtet. Bei der Be-

2) Man addirt das Procent zu 100, und multiplizirt die Summe so oft in selbst, als Jahre gegeben sind; nimmt die vorderste Ziffer davon weg, und dividirt mit den übrigen Ziffern das letzte Produkt aus Nr. 1.

3) Zu dem Quotienten addire man die einjährigen Zinsen des Kapitals, so erhält man die Summe des jährlichen Abtrags.

Ich eile wieder zu meiner Beurtheilung der Michelsenschen Abhandlung hin, wo noch die zweyte Art Aufgaben übrig ist; welche aber nicht die vorige Umständlichkeit erfordern, und außerdem außer den Grenzen meiner eigentlichen Absicht liegen.

Auch hier hat jeder besondere Fall, wenn nemlich das terminweise fällige Kapital zu 5 oder zu 4 Procent genutzt werden kann, seine **besondere Regel.** Ich will sie hier nicht abschreiben, denn meine Leser können sie selbst machen, wenn Sie den zweiten Theil der Regel für den ersten Fall der vorigen Art Aufgaben in folgendes verwandeln: „Ist dieses geschehen, so multiplizire man mit dieser Differenz die jährlich fällige Summe, und dann das Product mit 20, dividire das kommende durch das anfänglich aus 21 gefundene Product.“ Für den 2ten Fall verwandeln Sie nur in der für den 1sten Fall 20 in 25, und 21 in 26, so ist auch die Regel für selbige da. Die **Allgemeine Regel** trennt sich wieder in zwey besondere, nach dem Unterschiede des Zählers und Nenners der Anzeiger. Ist dieser Unterschied nur 1, so bleibt obige

Regel

Regel für den 1sten Fall, wenn man statt 20, den Nenner, und statt 21 den Zähler setzet. Ist er größer als Eins, so dividiret man noch das Erhaltene durch diesen Unterschied.

Hier, so wie vorhin, würde alle diese Weitläuftigkeit wegfallen, wenn eine, in allen Fällen bequeme, allgemeine Regel gegeben wäre. Ich würde folgende gegeben haben.

1) Man addire das Procent zu 100, und multiplizire die Summe so oft in sich selbst, als Jahre gegeben sind.

2) Mit dem Produkte nehme man folgendes vor: Zuerst nehme man die erste Ziffer davon weg, und setze 2 Nullen hinten daran. Zweitens multiplizire man es ohne verändert mit dem Procente.

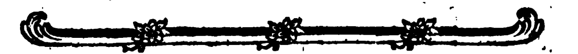
3) Jenes veränderte Produkt multiplizire man nun mit der jährlich fälligen Summe, und dividire das kommende mit dem letzten Produkte aus Nr. 2. der Quotient giebt das gleich zu bezahlende Kapital.

Diese Regel ist eine wörtliche Uebersetzung, für den bloß praktischen Rechner, von folgender Formel:

$$A = \frac{\left((100 + p)^n - 100^n\right) 100\, x}{p\,(100 + p)^n}$$

welche sich gleich natürlich aus Hr. Biermann's seiner, als der, die Hr. Michelsen's Regel zu der ersten Art Aufgaben bezeichnet herleiten läßt.

Auf Beweislichkeit muß der blosse gemeine Zahlrechner, sowohl bey Hr. Michelsen's Abhandlung, als bey dieser meiner Abhandlung, Verzicht thun. Diese für diesen zu erlangen ist allerdings nicht leicht: doch hätte eine 4 Bogen starke Abhandlung sie völlig enthalten können, 'wenn Hr. Michelsen nicht gewußt hätte, mit leichterer Mühe, den Raum auszufüllen — ein Fehler der den übrigen neuesten Schriften dieses würklich guten Schriftstellers immer mehr scheint eigen zu werden. Doch davon folgt der Beweis wohl ein ander Mahl. — Am Ende unser vor uns habenden Abhandlungen sind noch einige Anmerkungen hinzugefügt, deren Hauptinhalt hier nur noch Platz haben kann. Sie enthalten züerst eine Erzählung der Fälle, in welchen die betrachteten Aufgaben im Leben anwendbar sind, welchen noch einige mehrere hätten hinzugefügt werden können; dann einige angeführte Brücher, worin die Aufgaben auch betrachtet sind; dann eine Tabelle, welche zeigt, wie viel man geben muß, um um verschiedene Jahre nach einander (von 1 bis 50) 10000 Rthlr. zu erhalten, bey 5, 4 und 3 Procent. Diese nimmt 3 Blätter ein, ohngeachtet sie auf einem Blate Raum genug gehabt hätte. Dann folgt der Gebrauch dieser Tabelle zu Berechnung der Aufgaben, die in der Abhandlung vorgetragen sind.



III. Von den Logarithmen,

ihre Entstehung und besonders ihren Anwendungen in der Rechenkunst, für den blossen Zahlenrechner.

„Wem Dezimalrechnung, Buchstabenrechnung, gründliche Kenntniß der Logarithmen, fehlen, dessen Arithmetik ist von einer zulänglichen pracktischen Brauchbarkeit noch soweit entfernt, als der Amerikaner von der Regeldetri, der eine Zahl die über zwanzig geht, nur durch eine Hand voll Haare angeben kann.

Kästner.

§. 1.

Nutzen und Nothwendigkeit der Logarithmen, bisherige Unwissenheit darin.

Es sind nun schon beinahe zweihundert Jahr, daß die Mathematiker sich in ihren Berechnungen, eines Vortheils bedienen, welcher ihnen Mühe und Zeit abkürzt, und wenn sie die Folgen ihrer Rechnungen gefunden haben, letztere selbst oft bis zum Kinderspiel erleichtert. Aber auch zu bedauren ists, daß dieser Vortheil, so wie noch mehrere andere, beinahe allein für ihn Vortheil geblieben ist: da doch der gemeine

Rechner noch immer über die schwere Mühe, über lange Zeit seufzt, die oft seine Rechnungen erfordern, und nach jeder neuen Regel hascht, die für eine Erleichterung seiner Mühe oder Verkürzung seiner Zeit angepriesen wird. Er greift nach Tabellen, worin ein anderer ihm vorgerechnet hat, und erkauft sich oft durch den Gebrauch derselben die etwas wenigere Anstrengung des Kopfes mit einer doppelten Zeit die er zum Suchen verschwenden muß; und in der Folge wird er, wenn ihm das Unglück trift, daß er ohne seinen Rechenknecht rechnen soll, Trägheit und Vergessenheit gewahr. Wenn er sich nur umsehen wollte in dem Gebiete seiner Wissenschaft, er würde Zahlen kennen lernen, die sich Logarithmen betiteln, welche ihrer Natur nach das Vermögen haben, seinen Wunsch sowohl in Ansehung der Mühe als der Zeit zu befriedigen, aber unter der Bedingung daß er sie richtig und nach Gründen zu gebrauchen wisse. — Die Frage: woher mag's kommen, daß diese Zahlen und ihr Nutzen noch so wenig bekannt ist? ist, wie mich dünkt, leicht zu beantworten. Die Anweisungen zur Rechenkunst die eigentlich für den gemeinen Rechner geschrieben sind, handeln Logarithmen gar nicht ab, und in Gymnasien, Lyceum und Stadtschulen ist der Unterricht in der Rechenkunst größtentheils noch gar zu mangelhaft, als daß Logarithmen darin gelehret werden könnten. Noch jetzt — wer sollt's glauben, da über den Schulunterricht so viel geschrieben wird — noch

jetzt,

jetzt, erschienen Rechenbücher, die nur Vorrathkammern von Exempeln sind, und Falsi und Cözi nach alten Leisten bearbeitet, Sonntagsbuchstaben und Sonnenzirkel, magische Quadrate und Uhrzahlen auskramen, ohne auf Nutzen und Gebrauch, ohne auf die Leser zu sehen, für welche sie bestimmt seyn sollen. Noch jetzt giebts Lehrer der Rechenkunst in den Schulen, welche ihren Schülern ihr arithmetisch Schulbuch, vorlegen und Auflösungen nach ihren, in ihrer Jugend eingeschriebenen Exempelbuche hübsch fein ausschreiben lassen, und wenn alle obige genannte Sächelchen auch darin seyn sollten, welche oft der Lehrer so wenig als seine Schüler verstehet, das thut nichts; der Schüler bekommt doch ein dikkes Buch voll Exempel, behält aber einen desto leerern Kopf. — O, schriftliche oder mündliche Lehrer, erkennt doch einmal die Wichtigkeit eures Gegenstandes; sehet doch auf Bedürfniß und wahren Nutzen; verlaßt doch einmahl die handwerksmäßige Bahn euer Lehrer, und denkt selbst; schon habt ihr gute Muster, ahmt nur nach!

§. 2.

Fortsetzung. Was der Verfasser von den Lesern voraussetzt.

Jeder der zu rechnen nöthig hat, wünscht auch die Mittel zu kennen, die seine Arbeit erleichtern; und unter diesen Mitteln verdienen die Logarithmen das Vorrecht. Die Kenntniß derselben und ihr Gebrauch

muß also mehreren Klassen des Publikums interessiren. Die Wichtigkeit des Nutzens hätte schon lange einen Arithmetiker bewegen sollen, die Lehre von den Logarithmen für bloß gemeine Rechner abzuhandeln, welches aber, soviel mir bekannt, nicht geschehen ist. Ich wage es, diese Lehre in dieser Hinsicht auszuarbeiten; vielleicht glückt' es mir, einige von der Beschaffenheit und den Nutzen dieser Hülfszahlen zu überzeugen; vielleicht dankt es mir der Geschäftsmann und der Kaufmann, daß ich ihm den Weg zeigte, wie er mit weniger Mühe und Zeit seine Reihe von Kalkulationen vollbringt; vielleicht ermuntere ich hie und da einen Lehrer dazu, diesen Schritt weiter zu gehen, als seine Vorfahren und Schüler, den Zeit und demnächstige Bestimmung es möglich und nothwendig machen, auch dieß Erleichterungsmittel ihrer arithmetischen Arbeiten zu lehren: wenigstens ist es mein Wunsch und meine Absicht es zu thun. — Aber wie, — wird man mir entgegen rufen — wie ist ein gemeiner Rechner zu Logarithmen fähig, da die Kenntniß von ganzen Zahlen, Brüchen und Regeldetri oft alles ist, was man von ihm fodern kann? wie ist der zu einer Lehre fähig, die Kenntnisse von Proportionen, Progression, und noch mehr, als was in die gemeine Rechenkunst gehört, voraussetzt? — Freilich, Rechner von leerem Kopfe werden nichts lernen, was Ueberlegung erfordert: aber dürfte man nur bei denselben, die Kenntniß von ganzen Zahlen, den Brüchen und der Regel-

detri

detri **gründlich** voraussetzen, so könnte man zur Erlernung der Logarithmen leicht rathen, aber auch das darf man nicht. Ich werde es ihnen daher aus den ersten Gründen, aus Multiplikation und Division zu entwickeln suchen: aber freilich muß ich eine bessere, als gemeine Schulkenntniß von ganzen Zahlen und Brüchen voraussetzen dürfen, und demnächst in der Anwendung setze ich noch mehr voraus: nichts mehr aber als was man von einem bloßen Zahlenrechner fodern kann. Außerdem muß ich dem Verstande meiner Leser, für die ich eigentlich schreibe, zwei Forderungen machen, wenn es anders möglich seyn soll, die Hülfszahlen, die wir uns bekannt machen wollen, gründlich zu verstehen und richtig zu gebrauchen: **Kenntniß von Decimalbrüchen und von entgegengesetzten Zahlen** — gewiß Foderungen, die man den mehrsten **deutschen** 1) Rechnern nicht machen darf. Diesen nun, und also den mehrsten, sah ich mich gezwungen, mit diesen beiden Vorkenntnissen erst bekannt zu machen, ehe ich zu Logarithmen selbst und deren Gebrauch fortgehen durfte.

1) Der **Engländische** Rechner ist, was die Decimalbrüche betrift, vor den deutschen voraus; denn in allen ihren Anweisungen zur Rechenkunst machen Decimalbrüche einen beträchtlichen Theil aus, und aufs vortheilhafteste werden sie auf Leibreiten Tontinen, Zinsen ꝛc. angewandt, welche Rechnungen denn auch ein großer Theil ge-

gemeiner Rechner in Engelland weiß; wenigstens kennen die mehrsten Decimalbrüche: warum denn nicht der Deutsche?

§. 3.

Plan der Ausführung. Etwas zur Aufmunterung.

Hieraus wird man meine Ausführung gerechtfertigt finden. Zuerst werde ich nemlich in der **Vorbereitung** die Vorkenntnissen lehren, welche ich von den wenigsten gemeinen Rechnern voraussetzen mußte: **Kenntniß von Decimalbrüchen und Begriffe von entgegengesetzten Zahlen.** Dann dadurch vorbereitet werde ich zu den **Logarithmen selbst** gehen, den Begriff derselben, ihre Eigenschaften, und die Entstehung der jetzigen in den Tafeln befindlichen zeigen. Dann von dem **Gebrauche der Tafeln überhaupt** reden, und endlich die **Anwendung der Logarithmen** auf die verschiedenen Rechnungsarten in der Rechenkunst, die so zur Theorie gehören, als auch die, so die Anwendung im Leben erfodern. Hierdurch denke ich meinen vorhabenden Zweck zu erreichen. Der möglichen Deutlichkeit werde ich mich zu befleißigen suchen, so wie den Grad von Beweislichkeit, den bloß Zahlen und nicht übertriebene Weitläuftigkeit erreichen lassen. Jedes Geschäft im Leben, soll es zweckmäßig ausgerichtet werden, erfodert gesunden Menschenverstand, und **mehr** diese Lehre auch nicht;

nicht; freilich bei manchen Geschäft ist nur Kenntniß des Schlendrians nöthig: nun lerne erst Logarithmen kennen, dann ist ihr Gebrauch den Schlendrian eben nicht unähnlich. — Also, fordert dein Beruf vieles Rechnen und suchst du Mittel, es dir zu erleichtern; nun so widme einige von den Stunden deiner Musse zu Erlernung dieser Lehre, du wirst deine Wünsche befriedigt finden. Und du Jüngling! gehe still in die Einsamkeit, lies, denke, untersuche, übe dich, du wirst auch hierin das Vergnügen empfinden, das in der Brust eines jeden auflodert, welcher sich's bewußt ist, seine Kenntniß erweitert, sich dadurch vervollkommt zu haben, um künftig seinen Beruf leichter, folglich treuer verrichten zu können. Wünschest du künftig auch Selbstgenuß, frohe Stunden, keine Klage über langweilige Arbeit und überhäufte Geschäfte, so suche jedes Mittel auf, die deine Arbeit erleichtern können, und also auch dieß; und empfindest du darin Vergnügen, mehr als deine Mitbrüder zu wissen; so wirst du auch dieß hier finden. —

Vorbereitung.

I. Von den Decimalbrüchen.

§. 4.

Was ist ganz, eine ganze Zahl, ein Bruch?

Ganz nennt man das, was keine Theile hat, oder bei welchem man keine betrachtet. Bei der Be-

stimmung des was ganz seyn soll, kömmt es in der Rechenkunst blos darauf an, wie man die Dinge betrachtet. Das, was man eben als einen Theil ansah, kann man gleich darauf wieder als ein Ganzes ansehen, nähmlich, wenn wir darin wieder Theile annehmen. Einen Groschen sehen wir als einen Theil vom Thaler an, und sehen wir auf Pfennige, so denken wir uns den Groschen, der eben als Theil betrachtet wurde, als ganz und die Pfennige als Theile davon. — Wenn wir zählen, so geschieht es aus der Absicht, um die Vielheit von Etwas zu erfahren, wovon mehr als Eins da ist, oder als da betrachtet wird. Dies Etwas ist aber immer ganz, kann aber auch ein Theil eines größern Ganzen, einer größern Einheit sein; und ist dies Letzte, so bestimmen wir durch unser Zählen die Vielheit, oder wie man eigentlich sagt, die Zahl der Theile von der größern Einheit. (Soll eine Erbschaft vom Großvater, unter seine Enkel vertheilt werden, und der Großvater hatte 3 Söhne, und jeder dieser Söhne hatte 4 Kinder, so ist die Erbschaft das Ganze und der Antheil jedes seiner Kinder ist $\frac{1}{3}$tel davon, so lange ich blos in meiner Betrachtung bei diesem Antheile stehen bleibe; gehe ich weiter, und sehe auf den Antheil der Enkel, so ist jenes drittel der Erbschaft wieder ein Ganzes für die jetzige Betrachtung, und der Antheil der Enkel ein Theil davon.) Beispiele hievon trift der Rechner sehr oft in seinen Rechnen an. Die Summe von 100 Rthlr. zeigt an, daß

1 Rthlr.

1 Rthlr. das Ganze oder die Einheit ist, deren Vielheit dadurch angegeben wird. Der Gutegroschen ist ein Theil von dem Thaler, und folglich, soll der Thaler einzig das Ganze seyn, wornach ich die Vielheit angeben will, so muß ich, sind außer den Thalern noch Gutegroschen vorhanden, die Anzahl der dadurch vorhandenen 24stel vom Thaler angegeben. $\frac{2}{24}$, $\frac{3}{24}$ .... $\frac{18}{24}$ sind Mengen von einer Einheit, welche für sich betrachtet ganz ist, aber einen Theil einer andern größern Einheit, nähmlich des Thalers ausmacht. — Alle Zahlen, deren Einheit nicht als einen Theil einer größeren Einheit betrachtet wird, nennt man in der Rechenkunst **ganze Zahlen**, und alle Zahlen, deren Einheit als ein Theil einer größern Einheit betrachtet wird, sind die so genannten **Brüche**. Man könnte daher die **ganzen Zahlen** so erklären: es sind Mengen von einer ganzen Einheit, und die **Brüche**: es sind Mengen einer getheilten Einheit, und dann ist der einzelne Theil der ohngetheilten Einheit die **Einheit des Bruchs**, so wie die ungetheilte oder ganze Einheit, die **Einheit der ganzen Zahl** ist.

§. 5.

Aehnlichkeit ganzer und Brüche.

Eine einmal festgesetzte Einheit läßt sich 2, 3 .... Millionen, ... Quadrillionen .... unendliche mal denken, die Vielheit der ganzen Einheit kann also von 2 an so groß seyn, als man will. Eben so begreiflich

ist

ist es, daß sich eine einmal festgesetzte Einheit in 2, 3, 4 . . . . . in Millionen . . . . Quadrilionen . . . . Theile, in so viel Theile theilen lasse, als man wolle. Man hat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, . . $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{1000}$ . . . . $\frac{1}{1000000}$ . . . . .; und je weiter diese Theilung fortgesetzt wird, je kleiner muß die Bruchseinheit werden. Eine der nächsten Folgerungen hieraus ist also die: daß man eben so, wie man die Einheit wiederholt, auch theilen könne. — Wie vielmal wird man aber eine solche Bruchseinheit nehmen können? Jeder wird die Antwort selbst finden: gerade so vielmal kann man die Einheit des Bruchs nehmen, als die Zahl der Theile, worin die festgesetzte ganze Einheit getheilt ist, weniger 1; denn, würde man dieselbe noch einmal mehr nehmen, so würde es aufhören ein Bruch zu seyn, so würde er zur ganzen Einheit werden. Zum Beispiel: ist die jetzt noch ohngetheilte Einheit 1 Meile, und ich theile dieselbe in 12000 Theile, so wird ein einzelner Theil davon dann wieder zur Einheit, wenn ich davon eine Menge angeben will; und ich kann diese Bruchseinheit 1, 2, 3 . . . u. s. w. bis 11999 mal haben; würde ich zu $\frac{11999}{12000}$ aber noch eine Einheit, oder $\frac{1}{12000}$ hinzuzählen, so würde die Zahl von 12000 einzelnen 12000 Theilen einer Meile, wiederum die ganze Meile, die festgesetzte Einheit selbst, und folglich aufhören ein Bruch zu seyn. 11999 ist aber 1 weniger als 12000.

§. 6.

§. 6.

Wie man die Vielheiten ganzer und getheilter Einheiten anzeige.

Wenn wir die Vielheit einer Einheit anzeigen wollen, so bedienen wir uns folgenden Mittels: wir nehmen die **Einheit** zehnmal, lassen diese zehnmalige Einheit für eine neue Einheit gelten, wenn wir mehr haben als zehne der ersten Einheiten. Diese neue Einheit nennen wir **Zehner**, und geben ihr, wenn wir schreiben, die zweite Stelle nach der Linken. Diese Zehner nehmen wir wiederum zehnmal, und machen aus diesem zehnmaligen Zehner eine neue Einheit, unter den Namen **Hundert**, schreiben diese in die 3te Stelle, zur Linken. Wir wiederholen dieses Zehnmalnehmen, und machen aus dem zehnmaligen Hundert, eine neue Einheit, die **Tausend** heißt. Dann behält man bei den folgenden gleichförmigen Wiederholungen mit Zehne, den Namen Tausend bei, und sagt Zehntausend ꝛc. Wir zeigen also die Zahl der Einheit durch **eine gleichförmige Wiederholung der Einheit mit Zehne** an. Jede vorhergehende Einheit ist also der zehnte Theil der nächstfolgenden; ein Zehner ist $\frac{1}{10}$ von Hundert. Von jeder der vorhergehenden Einheit können daher 10 weniger 1, das ist: 9 vorhanden seyn; denn 10 davon macht die neue nächstfolgende Einheit. Also können nur 9 Einer, 9 Zehner 9 Hunderte ..... Statt finden. (§. 5.)

Eben

ist es, daß sich eine einmal festgesetzte Einheit in 2, 3, 4 . . . . . in Millionen . . . . Quadrilionen . . . . Theile, in so viel Theile theilen lasse, als man wolle. Man hat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, . . $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{1000}$ . . . . $\frac{1}{1000000}$ . . . . .; und je weiter diese Theilung fortgesetzt wird, je kleiner muß die Bruchseinheit werden. Eine der nächsten Folgerungen hieraus ist also die: daß man eben so, wie man die Einheit wiederholt, auch theilen könne. — Wie vielmal wird man aber eine solche Bruchseinheit nehmen können? Jeder wird die Antwort selbst finden: gerade so vielmal kann man die Einheit des Bruchs nehmen, als die Zahl der Theile, worin die festgesetzte ganze Einheit getheilt ist, weniger 1; denn, würde man dieselbe noch einmal mehr nehmen, so würde es aufhören ein Bruch zu seyn, so würde er zur ganzen Einheit werden. Zum Beispiel: ist die jetzt noch ohngetheilte Einheit 1 Meile, und ich theile dieselbe in 12000 Theile, so wird ein einzelner Theil davon dann wieder zur Einheit, wenn ich davon eine Menge angeben will; und ich kann diese Bruchseinheit 1, 2, 3 . . . u. s. w. bis 11999 mal haben; würde ich zu $\frac{11999}{12000}$ aber noch eine Einheit, oder $\frac{1}{12000}$ hinzuzählen, so würde die Zahl von 12000 einzelnen 12000 Theilen einer Meile, wiederum die ganze Meile, die festgesetzte Einheit selbst, und folglich aufhören ein Bruch zu seyn. 11999 ist aber 1 weniger als 12000.

§. 6.

§. 6.

Wie man die Vielheiten ganzer und getheilter Einheiten anzeige.

Wenn wir die Vielheit einer Einheit anzeigen wollen, so bedienen wir uns folgenden Mittels: wir nehmen die **Einheit** zehnmal, lassen diese zehnmalige Einheit für eine neue Einheit gelten, wenn wir mehr haben als zehne der ersten Einheiten. Diese neue Einheit nennen wir **Zehner**, und geben ihr, wenn wir schreiben, die zweite Stelle nach der Linken. Diese Zehner nehmen wir wiederum zehnmal, und machen aus diesem zehnmaligen Zehner eine neue Einheit, unter den Namen **Hundert**, schreiben diese in die 3te Stelle, zur Linken. Wir wiederholen dieses Zehnmalnehmen, und machen aus dem zehnmaligen Hundert, eine neue Einheit, die **Tausend** heißt. Dann behält man bei den folgenden gleichförmigen Wiederholungen mit Zehne, den Namen Tausend bei, und sagt Zehntausend ꝛc. Wir zeigen also die Zahl der Einheit durch **eine gleichförmige Wiederholung der Einheit mit Zehne** an. Jede vorhergehende Einheit ist also der zehnte Theil der nächstfolgenden; ein Zehner ist $\frac{1}{10}$ von Hundert. Von jeder der vorhergehenden Einheit können daher 10 weniger 1, das ist: 9 vorhanden seyn; denn 10 davon macht die neue nächstfolgende Einheit. Also können nur 9 Einer, 9 Zehner 9 Hunderte ..... Statt finden. (§. 5.)

Eben

Eben so zählen wir getheilte Einheiten. Habe ich $\frac{1}{24}$ mehr wie 9 mal; so zähle ich $\frac{10}{24}$, und habe ich $\frac{1}{24}$ mehr, wie 99 mal, so zähle ich $\frac{100}{24}$, das ist: ich nehme $\frac{1}{24}$ zum ersten Male 10 mal, und zum andern Male die $\frac{10}{24}$ wiederum 10 mal; u. s. f.

So wohl die Vielheit der ganzen als getheilten Einheit schriftlich anzuzeigen, bedient man sich der Anordnung der Ziffern den Stellen nach, worin sie gesetzt werden. Nachdem die Einer ihre Stelle eingenommen, so bekömmt jede Wiederholung mit Zehne eine Stelle zur Linken dieser Einer; und dadurch wird jeder Ziffer ihr Werth oder Rang angewiesen, die sie, vermöge der gefolgten Wiederholungen, haben muß.

Hier muß ich alles das, was zur Numeration gehöret, vollkommen und gründlich verstanden, bei meinen Lesern voraussetzen; denn sonst werden sie dies nicht, und die Folge gar nicht verstehen. Die also unser Zahlengebäude nicht recht kennen, muß ich bitten, diese Abhandlung gar nicht zu lesen, oder dasselbe erst kennen zu lernen. In den Anweisungen zur Rechenkunst, von **Schmid**, **Karsten**, **Richter**, **Clausberg**, **Wenzen**, **May**, ist diese Lehre gut, und deutlich vorgetragen. —. Aus obiger Ursache habe ich auch keine Beispiele gegeben.

§. 7.

§. 7.

Einleitung in die Dezimalbrüche. — Von Dezimalen.

Nach eben der Ordnung, nach welcher man die Vielheit einer bestimmten Einheit sich selbst, und andere verständlich macht, kann man auch eine bestimmte Einheit theilen. (§. 5.) Man kann, durch wiederholte Vervielfältigung der Einheit mit Zehne, zu jeder Vielheit hinauf, und so auch durch eine wiederholte Theilung derselben, mit Zehne, zu jeder Kleinheit herabsteigen. — Man theilt die Einheit in 10 Theile, und macht aus $\frac{1}{10}$ der ganzen Einheit, eine neue Einheit, welche nun **Zehntel** heissen muß. Von diesen Zehnteln können nur 1 . . . . . 9 Statt finden, denn 1 Zehntel mehr, würde nicht mehr Zehntel, sondern die erste Einheit ausmachen. Theilt man diese neue Einheit $\frac{1}{10}$ oder Zehntel wieder durch Zehne, so entstehet durch diese neue Theilung ein Zehntel von den Zehntel, welches eine neue Einheit $\frac{1}{100}$ giebt, welche **Hundertel** heißt, so wie die Vervielfältigung der Zehner, mit Zehne, Hunderte heissen, $\frac{8}{100}$ können nur höchstens da seyn, denn $\frac{1}{100}$ mehr, würde die vorige Einheit, den Zehntel, wieder geben. Setzt man die Theilung mit Zehne fort, so entstehen immer neue Einheiten, davon die nächstfolgende jederzeit 10 mal kleiner ist, als die vorhergehende. Den Hundertel wieder mit Zehne getheilt, giebt $\frac{1}{1000}$ ein **Tausendel**; und diesen getheilt, $\frac{1}{10000}$ ein **Zehn**-

tau-

tausendel; diesen getheilt, $\frac{1}{100000}$ ein Hunderttausendel; diesen getheilt, $\frac{1}{1000000}$ ein Milliontel ꝛc. Man wird diese Theilung nun leicht in Gedanken fortsetzen können; nichts hindert uns mit dieser gleichförmigen Theilung, so wie bei jener gleichförmigen Wiederholung der bestimmten Einheit, bis ins Unendliche fortzugehen. Lassen sich bei dieser Billionen, Trillionen, Quadrillionen . . . . . u. s. w. denken und erlangen, so erlangen wir auch durch jene Billiontel, Trilliontel, Quadrilliontel . . . . . .; und sehr leicht wird man das Gesetz bemerken, daß **durch eine gleichvielmalige Wiederholung die Einheit um so viel mal größer, als durch Theilung kleiner wird.** Wiederholung und Theilung sind also in ihren Wirkungen entgegengesetzt, und doch beide den allgemeinen Gesetz unterworfen: daß die Einheit von der vorhergehenden Ordnung immer zehmal größer ist, als die von dem nächstfolgenden, wenn man sie gleichsam von oben an ansieht, das ist: von einer willkührlich gewählten höheren Ordnung anfängt, und die Wiederholungen bis zur Einheit, und denn die Theilungen derselben, bis auf jede beliebige niedrige Ordnung betrachtet. Z. B. 6 tausend ist zehnmal größer als 6 Hundert, und 6 Hundert 10 mal größer als 6 Zehner, und diese 10 mal größer als 6 Einer, und 6 Einer sind 10 mal größer als 6 Zehntel, und diese 10 mal größer als 6 Hundertel u. s. w., so weit man will.

Betrachtet man sie aber so, wie sie aus der festgesetzten Einheit entstehen, so entstehen dadurch gleichsam zwei Reihen: eine von wiederholter Vervielfältigung der Einheit, welche also lauter ganze Einheiten enthalten, und daher **ganze Zahlen** geben muß, und welche das Gesetz in ihrer Aufsteigung hat: daß immer die, der Einheit am nächsten liegende Ordnung, 10 mal kleiner ist, als die folgende; und dann eine Reihe von Theilungen, welche also keine ganze Einheiten mehr enthält, folglich mit Recht den Namen der **Brüche** führt, und welche von jener Reihe gerade das Gegentheil zum Gesetz in ihr zur Folge hat: nemlich, daß jede, der Einheit am nächsten liegende, Ordnung, immer 10 mal größer als die folgende ist.

Die Ordnung nun, die wir in unsern Zählen beobachten, indem wir die Einheit wiederholt, mit Zehne entweder vervielfältigen oder theilen, nennet man die **Dezimalordnung** oder **System**. Die ganzen Zahlen, die durch die wiederholte Vervielfältigung der Einheit mit Zehne entstehen, nennet man daher **Dezimalzahlen**, und die Brüche, die aus der wiederholten Theilung der Einheit mit Zehne entstehen, nennet man daher **Dezimalbrüche**. Ist von beiden überhaupt die Rede, so nennet man sie **Dezimalen**. — 6000, 500, 70, 8 sind Dezimalzahlen, so wie die aus diesen zusammengesetzte Zahl noch eine ist. Und $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ sind De-

Decimalbrüche weil die Theilung der Einheit, bis zu jeden Bruche gleichförmig wiederholt durch Zehne geschehen ist. Denn $\frac{5}{10}$ ist $= \frac{1}{10} \times 5$, das ist ein Zehntel der Einheit 5 mahl; $\frac{7}{100} = \frac{1}{100} \times 7$, das ist $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \times 7$. rc. Addiret man jene Brüche alle zusammen, so ist der Hauptnenner 10000, und dann ist $\frac{5762}{10000}$ der aus jenen Brüchen zusammengesetzte Bruch, und also auch ein (aber zusammengesetzter) Decimalbruch. Gesetzt, meine Zahl beliefe sich auf $6000 + 500 + 70 + 8$ und $\frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{2}{10000}$; so bestimte die ganze Reihe, meine Zahl aus Dezimalen.

§. 8.

Wie Decimalbrüche geschrieben werden.

Die Einheit, der Ursprung aller ganzen Zahlen und aller Brüche, stehet nun gleichsam, zwischen den wiederholten Vervielfältigungen und Theilungen mit Zehne, in der Mitte. — Jeder meiner Leser weiß, wie die durch die Wiederholung der Einheit entstehende ganze Zahlen ausgesprochen und geschrieben werden, aber dies nicht von den durch die Theilung mit 10 entstehende Decimalbrüche. Von beiden muß ich also noch etwas sagen.

Zuerst wie sie geschrieben werden. Bei ganzen Zahlen wird jeder neuen Wiederholung mit Zehne eine neue Stelle der Einheit zur Linken gegeben, und bei Decimalbrüchen wird jeder neuen Theilung mit Zehne, eine

eine neue Stelle der Einheit zur Rechten eingeräumt; und daher ist die Schreibung der letzteren mit den ersten gleichförmig, und nichts als der Unterschied dabei, daß die ganzen Decimalen zur Rechten, die Brüche aber zur Linken der Einheit geschrieben werden. Im Werthe müssen die Ziefern der ganzen und gebrochenen Decimalen in einerley Stellen von der Einheit ab, entgegengesetzt seyn. **Der Werth der Ziefern von den ganzen Zahlen steigt, je weiter sich die Ziefern von der Einheit entfernen, und der Werth der Ziefern der Brüche fällt, je weiter sich die Ziefern von der Einheit entfernen.** Dies müssen Anfänger bedenken, denn sonst pflegen sie bei den Decimalbrüchen leicht anzustoßen. Gesetzt nun, man wollte schreiben 600 und 50 und 4 und $\frac{2}{10}$ und $\frac{3}{100}$ und $\frac{7}{1000}$, so sind 4 die Einer; zur Rechten derselben müssen die 50 und 600 ihre Stelle nehmen, und dann entstehet erstlich die ganze Zahl 654, zur Linken der Einer müssen die Decimalbrüche ihre Stellen bekommen, und zwar die erste Theilung oder die Zehntel zuerst, dann die folgenden Theilungen, die Hundertel und Tausendel, und also kämen 237 als Decimalbrüche hinter die 4 Einer zu stehen, und die Zahl würde so aussehen: 654237. — Wer wirds aber dieser Zahl ansehen können, daß sie aus 654 ganzen und 2 Zehntel, 3 Hundertel und 7 Tausendel besteht? Wird nicht jeder sie für 654237 (lauter ganze Zahlen) halten? Es fehlt ein Zeichen, wodurch ange-

zeigt wird, welche unter allen den Ziffern die Einer sind; denn weiß man die, so folgt von selbst, daß die diesen Einern zur Linken ganze, und zur Rechten Brüche sind. **Dieses Zeichen ist nun ein, hinter den Einern gesetztes, Komma.** Die aus dem vorigen Exempel entstandene Zahl, 654237 wird also nicht mehr zweifelhaft bleiben, wenn hinter 4 ein Komma gesetzet wird, und dann sieht sie so aus: 654,237, wo 654 ganze, und 237 Brüche sind. Hat man eine Zahl von 34 Ganze, 3 Zehntel, 9 Hundertel, 1 Tausendel, 2 Zehntausendel, so würde die so geschrieben: 34, 3912.

Gesetzt aber, man solle 560 Ganze, und 7 Zehntel und 4 Tausendel und 9 Hunderttausendel schreiben, wie würde diese Zahl aussehen? Es fehlen in der Reihen von Decimalbrüchen die Hundertel und die Zehntausendtel, weil von diesen Theilungen der Einheit keine vorhanden sind: diese müssen so, wie in ganzen Decimalzahlen, die fehlenden höhern Ordnungen mit Nullen ausgefüllt werden, auch diese fehlenden niedern Ordnungen mit Nullen ergänzt werden. 560,90409 ist also obige Zahl. Hieraus wirds denn auch leicht erklärbar seyn, wie 3 Ganze und 7 Zehntausendtel geschrieben wird. Es fehlen die Zehntel, Hundertel und Tausendtel, also 3 Ordnungen, und 3 Nullen müssen daher ihre Posten besetzen: nähmlich 3,0007.

Vielleicht bringt dies manchen Leser von selbst auf den Gedanken, wie ein bloßer Decimalbruch,

wenn

wenn gar keine Ganze vorhanden sind, geschrieben wird. Wie z. B. 3 Zehntel, 4 Hundertel und 7 Tausendtel geschrieben werde. Würde man 347 hinschreiben, so fehlte wieder das Zeichen, welche anzeiget das es Decimalbrüche und keine Ganze sind. Stünden Einer davor, so würde es durchs Komma entschieden, da nun diese aber fehlen, so muß die, die Abwesenheit einer würklichen Ziffer anzeigende, Null, auch hier in die Stelle der Einer gesetzt werden, worauf dann das Komma folgt. Unser Beispiel würde also so geschrieben werden: 0, 347. — Eben daher würde $\frac{7}{1000}$ und $\frac{3}{10000}$ so aussehen: 0, 00 73; und $\frac{8}{1000000}$ + $\frac{2}{10000000}$ = 0, 0000902; $\frac{7}{100}$ + $\frac{8}{10000}$ + $\frac{9}{1000000}$ = 0, 070809.

§. 9.

Dezimalbrüche zu lesen.

Hieraus wird jeder leicht begreifen, wie Dezimalbrüche gelesen werden, und daher glaube ich nicht nöthig zu haben, mehr als ein paar Beispiele anzuführen: 3, 7391, heißt 3 Ganze, 7 Zehntel, 3 Hundertel, 9 Tausendtel und 1 Zehntausendtel. 0, 007801 heißt 7 Tausendel, 8 Zehntausendtel, 1 Milliontel. — Man spricht aber nicht immer so aus, sondern spricht die Ziffern der Dezimalbrüche als wenn es ganze Zahlen wären, aus, sieht sie als den Zähler eines Bruchs an, und spricht nun den Werth der letzten Ziffer als Nenner aus. Z. B. 9, 379 spricht man auch 9 Ganze und 379 Tausendtel aus, und zwar daher: weil $\frac{3}{10}$

+ $\frac{7}{100}$ + $\frac{9}{1000}$ unter einerlei Nenner gebracht $\frac{379}{1000}$ giebt:. Das erste der obigen zwei Beispiele kann man also auch so lesen: 3 Ganze und 7391 Zehntausendtel, und das zweite Beispiel so: 7801 Milliontel.

§. 10.

Zwei wichtige Bemerkungen.

Hier muß ich noch ein paar Bemerkungen machen, die in der Folge ihre Anwendung erhalten werden.

1) Wenn man hinter ganze Zahlen Nullen schreibt, so erhöhet man den Werth der Ziffern, welche die ganze Zahl ausmachen, mit jeder Null zehnfach, weil jede Ziffer der Zahl durch jede ihr beigesetzte Null eine Stelle weiter zur Linken rückt, und durch dieses Weiterrücken ihren vorigen Werth zehnmal größer wird. So ist es aber nicht mit den Dezimalbrüchen, und kann nicht so seyn. Noch so viel Nullen hinter den Ziffern der Dezimalbrüche gesetzt, können den Werth derselben nicht verändern, weil sie nicht durch Vervielfältung mit Zehne, sondern durch Theilung entstehen, und keine beigesetzte Null den Ziffern einen höhern Werth geben könne. Der Zahl 3, 78 drey Nullen beigesetzt, wird immer dennoch 3, 78 bleiben, denn die Nullen in 3, 78000 würden nichts weiter anzeigen, als von den Ordnungen welche sie besetzen, von den Tausendtel, Zehntausendtel und Hunderttausendtel nicht vorhanden wären, und weiter nichts. — Man pflegt aber wohl hinter den Dezimalbrüchen Nul-

len aus der Absicht zu schreiben, um den einen, von wenigern Bruchordnungen, einen andern, der mehr hat, an Ordnungen gleich zu machen. Als z. B., habe ich eine Zahl von 0, 78 und eine von 0, 6897, wo letztere also zwei niedrige Ordnungen mehr hat, d. i., die Theilung der Einheit mit Zehne, bey letztern ist zweimal weiter fortgesetzt, und man will erstere in eine Zahl verwandeln, welche auch bis zu 10 Tausendtel fortgehet, so hängt man 0, 78 zwei Nullen an, und dann sind 0, 7800 und 0, 6897 Brüche von gleichen Ordnungen, nemlich, ersterer 7800 Zehntausendtel, und der andere 6897 Zehntausendtel.

Setzte man aber vor den Dezimalbrüchen nach den Einern Nullen, so wird jede der darauf folgenden Ziffern des Bruchs, durch jede vorgesetzten Null, zehnmal kleiner; denn durch jede vorgesetzte Null entfernen sich die Ziffern um eine Stelle weiter zur Rechten, von der Einheit, und ihr Werth fällt zehnfach. (§. 8.) Würde also aus 0, 7681 folgende Zahl gemacht: 0, 007681 so wäre der Werth von 7681 um 100 mal kleiner, weil sie sich um zwei Stellen von der Einheit entfernen: es war 7681 Zehntausendtel, und ist durch Vorsetzung der Nullen 7681 Milliontel geworden.

2) Eine andere wichtige Bemerkung ist hiermit verbunden. Es ist 46587192 eine ganze Zahl; soll sie zehnmal erhöhet werden, so setzt man eine Null

 dar-

dahinter, wirds 465871920; soll sie noch zehnmal, oder überhaupt hundertmal erhöhet werden, so setzt man noch eine Null bei, und so wird sie ...... 4658719200; kurz, für jede zehnfache Wertherhö- hung setzt man eine Null daran. Aber wie, wenn sie zehnmal kleiner gemacht werden sollte, wie würde sie da aussehen? 46587192 zehnmal kleiner machen, heißt die Zahl mit 10 dividiren, und dann entstehet $4658719\frac{2}{10}$, also 4658719 Ganze und 2 Zehntel, und kann daher so geschrieben werden: .... 4658719, 2. Soll diese letztere Zahl noch 10 mal oder 46587192 hundertmal verringert werden, so wird $4568719\frac{2}{10}$ durch 10, oder 45687192 durch 100 di- vidirt, $456871\frac{9}{10} + \frac{2}{100}$ oder $456871\frac{92}{100}$ geben, das ist, also, nach Dezimalen geschrieben gleich 465871, 92

Setzt man dies Vermögen fort, so wird man auf die Art finden, daß 45687192 sey

Zehnmal kleiner	=	4568719, 2
Hundertmal ⸗	=	456871, 92
1, 000 mal ⸗	=	45687, 192
10, 000 ⸗ ⸗	=	4568, 7192
100, 000 ⸗ ⸗	=	456, 87192
1, 000, 000 ⸗ ⸗	=	45, 687192
10, 000, 000 ⸗ ⸗	=	4, 5687192
100, 000000 ⸗ ⸗	=	0, 45687192
1000, 000000 ⸗ ⸗	=	0, 045687192
10,000,000,000 ⸗ ⸗	=	0, 0045687192
100,000,000,000 ⸗ ⸗	=	0,000456871920
u. s. w.		u. s. w.;

daß

daß also bei jedesmaliger Verkleinerung mit Zehne, das Komma eine Stelle weiter zur Linken rücken, und eine Ziffer mehr als Bruch erscheine; oder, daß man von der ganzen Zahl so viel Ziffern für Brüche durch das Komma abschneiden müsse, als die Ordnungszahl welche anzeigt, wie viel mal sie verringert werden soll, Nullen hat: also bei 10 mal kleiner 1 Ziffer, bei 100 mal kleiner 2 Ziffern, u. s. w. Da, wo die Verringerung aller Ziffern der ganze Zahl, schon zu Dezimalbrüchen wegnimmt, und noch Stellen fehlen, muß man die mit Nullen ergänzen. (§. 8.)

Dies Verfahren ist auch daraus erweislich: daß, da unter den Ziffern in ganzen Zahlen von den Einern an, immer die folgende zehnmal mehr gilt, als die vorhergehende, die Zehner zu Einern, und Einer zu Zehntel werden, und dadurch alle Ziffern eine Ordnung herunter rücken müssen, wenn man die Zahl 10 mal kleiner macht. Macht man sie 1000 mal kleiner, so müssen die Tausende Einer, die Hunderte Zehntel, die Zehner Hundertel und die Einer Tausendtel werden. —

§. 11.

Verwandlung der gemeinen in Dezimalbrüche.

Nun Leser, wird unsre Unterhaltung etwas von ihrer bisherigen Richtung abweichen: wir haben unsern Gegenstand kennen gelernet, aber Anwendung und Gebrauch desselben, bei den Hauptveränderungen

der Zahlen, liegt noch vor uns. Sehen Sie noch einmal zurück, wenn Sie zweifeln, nicht alles gehörig verstanden zu haben. — Wir haben unendlich viel andere Brüche, als Zehntel, Hundertel ꝛc. und dies darum, weil man die Einheit in unendlich verschiedene Theile theilen kann: dies ist jeden bekannt. Es entstehet daher die Frage: wie ein jeder andrer Bruch, als die Zehntheiliger, in einen solchen verwandelt werde? wie viel Zehntel oder Hundertel ꝛc. z. B. $\frac{1}{4}$, oder $\frac{3}{8}$, oder $\frac{43}{153}$ ausmachen? Wir wollen sie zu beantworten versuchen.

$\frac{1}{2}$ ist der zweite Theil der Einheit. Dieser Bruch in einen Dezimalbruch, zum Beispiel, in Zehntel verwandeln, heißt also so viel, als angeben, wie viel die Hälfte der Einheit Zehntel ausmache. Was ist natürlicher, als daß — da die ganze Einheit 10 Zehntel ausmacht — die Hälfte dieser Einheit der Hälfte der Zehntel, also 5 Zehntel, das ist, nach §. 8., 0, 5 gleich seyn muß? — Um also $\frac{1}{2}$ in 10 Zehntel zu verwandeln, kann ich nur den Zähler 1 in 10 verändern, oder durch eine beigesetzte 0 verwandeln, und dann mit 2 dividiren, dann giebt $\frac{10}{2}$ den gesuchten Dezimalbruch 0, 5. — Wollte man $\frac{1}{2}$ in Hundertel verwandeln, so wollte man wissen, wie der 2te Theil der Einheit, Hundertel ausmachen, wenn sie aus hundert Theilen bestehet. Jeder wird von selbst auf 50 Hundertel denken, weil $\frac{100}{2} = 50$ giebt, also $\frac{1}{2}$ in Hundertel ist gleich 0, 50; und also auch hier braucht

man

man den Zähler 1 in 100 zu verwandeln, welches durch 2 hineingesetzten Nullen geschiehet, und dann mit 2 als den Nenner zu dividiren.

Der Bruch $\frac{1}{8}$ in Tausendtel verwandelt, heißt: angegeben, wie viel der 8te Theil einer Einheit Tausendtel ausmacht, wenn die ganze Einheit Tausend Tausendtel hat; und muß folglich 1000 durch 8 dividirt werden, welches dann 0, 125 giebt. Eben dies kömmt, wenn man in $\frac{1}{8}$ den Zähler 1 in 1000 verwandelt, welches, wie jeder leicht sieht, durch das Hinzusetzen 3er Nullen geschiehet, und dann mit 8 den Nenner dividiret.

Ueberhaupt wird jeder schon aus diesen drei Beispielen, und durch ein geringes Nachdenken leicht schließen können, daß man die Zahl, welche anzeigt, wieviel von der niedrigen Ordnung, von welcher man den Bruch wissen will, auf die Einheit gehen, durch den Nenner des Bruchs dividiren müsse. Da nun diese Zahl immer eine bloß Ordnungszahl, so könnte man zu **Verwandlung eines gemeinen Bruchs in einen Dezimalbruch** die **Regel** machen: **man hängt an den Zähler des Bruchs soviel Nullen, als jene Zahl erfordert, und dividire die dadurch entstehende Zahl durch den Nenner.** Z. B. $\frac{1}{16}$ sollte in Zehntausendtel verwandelt werden, so hänge ich an den Zähler 4 Nullen, weil Zehntausend 4 Nullen erfordern, und dividire 10000 durch 16, giebt 625 Zehntausendtel, oder nach Art der De-

zimal-

zimalbrüche zu schreiben = 0, 0 625. Wir wollen sehen, ob unsre Regel immer zutrift.

§. 12.

Fortsetzung.

1) Nicht alle Brüche kann man in einen Dezimalbruch **von einer bestimmten niedern Ordnung** so verwandeln, daß der Dezimalbruch ohne den geringsten Fehler, dem gemeinen Bruch gleich sey. Wenn z. B. $\frac{1}{8}$ in Hundertel verwandelt werden sollte, so würde $\frac{1}{8} = \frac{100}{8} = 12$ . . . mit einen Rest 4 geben; es wären also 0, 12 und $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ Hundertel. Will man $\frac{1}{8}$ nicht genauer als in Hundertel wissen, so muß man das halbe Hundertel verlohren geben, und für Nichts ansehen. Will oder darf man das aber nicht, so muß man auch nicht bei der Ordnung der Hundertel stehen bleiben, sondern weiter gehen, die Tausendtel rc. suchen. Das $\frac{1}{2}$ Hundertel würde also noch 5 Tausendtel geben, womit dann die Zahl aufgienge, und 0, 125 der genaue Dezimalbruch ist, welches $\frac{1}{8}$ am Werthe gleich ist. Eben so $\frac{1}{16}$ in bloße Hundertel verwandelt, giebt nur 0, 06 . . mit einem Reste von 4, wodurch also $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ Hundertel an der Gleichheit verlohren gehet, wenn man das Verwandeln nicht weiter fortsetzt. Bis 10 Tausendtel fortgesetzt, giebts aber 0, 0625 ganz genau. (§. 11.)

2) Aber noch mehr Brüche lassen sich, wenn man auch die Verwandlung bis zu jeder niedrigen Ordnung,

bis

bis zu Milliontel, Billiontel . . . . . . Quintilliontel . . . fortgesetzt, demohngeachtet nicht genau in Dezimalbrüchen angeben. Meine Leser werden sich davon bald durch den Augenschein überzeugen, wenn Sie einmal $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{9}$ oder $\frac{1}{7}$ in Dezimalbrüche verwandeln wollen. Von der Verwandlung des ersten und letzten Bruchs will ich hier den Anfang hersetzen:

Zuerst $\frac{1}{3}$ zu Milliontel

$$\frac{1}{3} = \frac{1000000}{3} = 3)\,1000000\,|\,0{,}333333$$

```
3)1000000|0,333333
  9
  10
   9
   10
    9
    10
     9
     10
      9
      10
       9
       1
```

Nun bleibt noch ein Rest von 1, und dieser bleibt auch bei jeder Subtraktion, wozu alsdann 0 gesetzt, immer 10 gab, worin 3 der Quotient und wieder 1 der Rest war, und dies würde auch mit diesen letzten und mit allen den folgenden Resten geschehen, die Verwandlung möchte so weit fortgehen, wie man wollte.

Nun

Nun $\frac{1}{7}$ = zu Billiontel

$$\frac{1}{7} = \frac{1000000000000}{7} =$$

```
      7)  1000000000000|0,14285714285.....
          7...........
Rest, 3.  30..........
          28..........
  „   2    20.........
           14.........
  „   6     60........
            56........
  „   4      40.......
             35.......
  „   5       50......
              49......
  „   1        10.....
                7.....
  „   3         30....
                28....
  „   2          20...
                 14...
  „   6           60..
                  56..
  „   4            40.
                   35
  „   5             5
```

Hier

Hier sind die Reste aus der Absicht bemerkt, um zu sehen, daß sie eine abwechselnde Folge halten. Bis zu 10 Tausendel sind sie 3, 2, 6, 4, 5, 1, und und dann geht die Reihe von neuen an; und wer Lust hat, die Division noch weiter fortzusetzen, wird finden, daß wenn 3, 2, 6, 4, 5, 1 Reste gewesen sind, dann diese immer von neuen angehen; nie würde also die Division aufgehen, und also $\frac{1}{7}$ nie genau in Dezimalbrüchen herauskommen.

Einem Theile meiner Leser wird die Fragen einfallen: Woher kommts, daß viele Brüche in der Verwandlung aufgehen? und welches sind diejenigen, die nie aufgehen? Hat man dazu keine Kennzeichen? — Gern würde ich diese Fragen Ihnen umständlich beantworten; aber ich würde zu sehr ausschweifen müssen, um allen verständlich zu werden. — **Alle Brüche, deren Nenner eine Zahl ist, die unter ihren kleinsten Factoren einen hat, welche nicht in Zehne aufgeht, gehen sie in der Verwandlung auf;** folglich, wenn der Nenner eine Primzahl ist, auch nicht: dies ist das **Kenntzeichen** welches man geben kann, und wovon ich wünsche, daß es jeder meiner Leser verstehen und brauchen könne. Mehr darf ich hier nicht davon sagen.

Die Frage: Wie weit aber muß man die Verwandlung fortsetzen? kann nur von der erforderlichen Genauigkeit der Rechnungsaufgabe, wobei man die Dezimalbrüche brauchen will, beantwortet werden.

Erfor-

Erfordert diese ein möglichst genaues Fazit, so muß die Verwandlung so weit fortgesetzt werden, bis der Rest ein sehr unmerklicher Theil der Einheit wird. Ein Millionttel ist gewiß ein kleiner Theil des Ganzen, und wird der Fehler in der Rechnung, wenn es auch fehlt, immer unbeträchtlich bleiben. Doch braucht man auch hier ein Mittel, um in der Rechnung mit mehrern Dezimalbrüchen, dieser Fehler noch unbeträchtlicher zu machen. Er ist: Bleibt am Ende der Division ein Rest, welcher mit dem Divisor in Bruch gesetzt, $\frac{1}{2}$ oder mehr als ein halb giebt, so nimmt man die letzte Ziffer des Quotienten um Eins größer, ist der Bruch unter $\frac{1}{2}$, so wird er für Nichts geachtet. Z. B. $\frac{1}{7}$ bis Tausendtel.

```
7) 1000 | 0, 142
    7
   30
   28
    20
    14
bleibt 6 zum Rest,
```

weil $\frac{6}{7}$ nahe dem Ganzen grenzt, so setzt man für den Quotienten 0, 142, 0, 143.

Weil man durch eine immer weiter fortgesetzte Verwandlung die Dezimalbrüche immer den gemeinen Bruch näher kommt; (obschon nie gleich); so nennet man diese Fortsetzung die **Annäherung.**

§. 13.

§. 13.

Fortsetzung.

Bisher sind die Brüche, welche wir verwandelt haben, bloß Bruchseinheiten gewesen, wie aber verwandelt man die Vielheiten davon in Dezimalbrüche? Einige Leser werden vielleicht von selbst auf den Gedanken kommen, daß man nur den Dezimalbruch so vielmal zu nehmen brauche, als die Vielheit oder der Zähler anzeige; daß z. B. wenn man den Dezimalbruch von $\frac{1}{4}$ wisse, man denselben nur 3 mal zu nehmen brauche, um den von $\frac{3}{4}$ zu finden. Sie haben recht, Sie werden immer damit das richtige Fazit treffen. Ich würde auch dieß zur Regel machen, wenns nicht besser wäre, auf Einem Wege zu zwei Bestimmungen zu kommen, als zu jeden einen besondern Weg zu wählen. — Die Bruchseinheit verwandelte man, wenn man an die Eins des Zählers, so viel Nullen hängt, als die Zahl hat, welche anzeigt, wie viel von der niedrigen Ordnung, von welcher man den Bruch wissen will, auf die Einheit gehen, und vielleicht läßt sich diese Regel auch auf Bruchsvielheiten ausdehnen.

$\frac{1}{4}$ zu Hundertel $= \frac{100}{4} = 0,25$; also muß
$\frac{3}{4} = \frac{100}{4} \times 3 = \frac{3 \times 100}{4} = \frac{300}{4} = 0,75 = 3 \times 0,25$
seyn.

$\frac{1}{16}$ zu 10 Tausendtel $= \frac{10000}{16} = 0,0625$, also muß $\frac{9}{16} = \frac{10000}{16} \times 9 = \frac{9 \times 10000}{16} = \frac{90000}{16} = 0,5625$ $= 9 \times 0,0625$ seyn.

$\frac{17}{24}$ muß seyn $= \frac{1}{24} \times 17$, also da $\frac{1}{24} = \frac{100}{24}$ oder $\frac{1000}{24}$, oder $\frac{10000}{24}$ oder $\frac{100000}{24}$ also $\frac{17}{24} = \frac{100}{24} \times 17 = \frac{17 \times 100}{24} = \frac{1700}{24}$, oder $\frac{1000}{24} \times 17 = \frac{17 \times 1000}{24} = \frac{17000}{24}$ oder $\frac{10000}{24} \times 17 = \frac{17 \times 10000}{24} = \frac{170000}{24}$; oder $\frac{100000}{24} \times 17 = \frac{17 \times 100000}{24} = \frac{1700000}{24}$, woraus dann $\frac{17}{24} = 0,71$ oder $0,7083$, oder $0,70833$ entstehet, je nachdem man $\frac{17}{24}$ in Hundertel oder Tausendtel, oder Zehntausendtel oder Hunderttausendtel wissen will. Wenn man diese Exempel mit Aufmerksamkeit verfolgt, so werden es Beispiele zum Beweise des Satzes werden: daß man den Zähler der Bruchsvielheiten nur mit der Zahl der niedrigen Ordnung, worin man den Bruch verwandeln will, multipliziren müsse, um den Dezimalbruch in der Ordnung zu bekommen; Da nun dieses Multipliziren nichts anders ist, als die Anhängung der Nullen, so entstehet zur Verwandlung aller gemeinen Brüche in Dezimalen die allgemeine Regel: **Man hängt an den Zähler so viel Nullen an, als die Zahl der niedrigen Ordnung hat, worin man den Bruch verwandeln will, und dividirt durch den Nenner,**

so

so erhält man den ihm gleichseyenden Dezimalbruch. Z. B. Es soll $\frac{3}{17}$ in einen Dezimalbruch bis Millontel verwandelt werden; so hängt man an 3 6 Nullen an, weil so viel zur Million erfordert werden, und dividirt mit 17, entstehet $\frac{3}{17} = 0,176471$.

§. 14.

Eine vermischte Zahl in Dezimalen zu verwandeln.

Sollt' es nun noch jemand schwer fallen, eine vermischte Zahl in Dezimalen zu verwandeln? Ich muß es nicht von einen meiner Leser fürchten dürffen, der sich Hoffnung macht, diese Abhandlung zu benuzzen. Eine vermischte Zahl ist ja ein unächter Bruch, und dieser hat ja in der Behandlung nichts besonders. $2\frac{3}{4}$ ist $= \frac{11}{4}$ und also in 100tel $= \frac{1100}{4} = 2, 75$. Und gesetzt, es fiele Ihm dies auch nicht ein (denn wissen muß ers) so fiele Ihm doch wohl ein, daß $2\frac{3}{4} = 2$ und $\frac{3}{4}$, und daß also nur die $\frac{3}{4}$ zu verwandeln sey, und 0, 75 zu 2 Ganze hinzuzusetzen wären, und dann wären 2 und 0, 75 auch 2, 75.

§. 15.

Dezimalbrüche in andere einer niedrigern Ordnung verwandeln; und eine wichtige Folge.

Noch ist eine Kleinigkeit übrig, welche aber um weiter zu gehen, doch nothwendig erst voran gehen muß. — Oft verlangts unsre Rechnung, Dezimalbrüche

brüche in andere von einer niedrigern Ordnung zu verwandeln: und wie macht man das? Nichts ist leichter. **Man hängt an den höheren Dezimalbruch so viel Nullen an, als die Ordnung des niedrigern erfordert,** so ist das Verwandeln geschehen, z. B. Man wollte 0, 4 der Ordnung worin 0, 876 gehöret, gleich machen, so hängt man an 0, 4 noch 2 Nullen, so entstehet 0, 400 das ist 400 Tausendel, welches noch eben so viel ist, als 0, 4; denn $\frac{4}{10}$ ist dadurch mit 100, Zähler und Nenner multiplizirt, und dann bleibt, — nach einem Lehrsatze in der Lehre von Brüchen, der jeden bekannt seyn muß — der Bruch im Werth unverändert. Auch ganze Zahlen kann man dadurch in eine gewisse Ordnung der Dezimalbrüche bringen, wenn man durch das Komma die Einer merkt, und dann die gehörigen Nullen anhängt. Z. B. 8 soll mit einem Dezimalbruch aus der Ordnung der Hundertel verglichen werden, so setze ich statt 8, 8, 00, das heißt 8 Hundert Hundertel, $\frac{800}{100}$, welches noch ebenfalls 8 im Werthe geblieben ist. Es werden hierdurch die Brüche verschiedener Ordnung unter einerlei Benennung gebracht; denn die Dezimalbrüche von einerlei Ordnung sind immer Brüche von einerlei Benennung: etwas, welches sich von selbst darbeut, woraus aber folgende wichtige Folge gezogen werden kann: **Brüche die in Dezimalbrüchen zu einerlei Ordnungen verwandelt sind, sind dadurch zu einerlei Benennung gebracht.**

§. 16.

§. 36.

Einen von den vorzüglichsten Vergnügen der Wissenschaft, oder eigentlicher, von der Sammlung verschiedener Wissenschaften, die alle auf einerlei Grundsätzen gegründet sind, von der Mathematik — und merkt's Leser, unter dieser Sammlung ist die Arithmetik eine der vorzüglichsten — ist, daß man sie auf sehr einfache und sehr wenige Lehrsätze zurückführen kann. Alle Resultate noch so verwickelter Rechnungen entstehen aus nichts anders, als den beiden Hauptveränderungen aller Zahlen: daß man sie vermehrt und vermindert; aus diesen beiden einzig und allein, denn eine dritte Veränderung ist damit nicht möglich, vielweniger dann mehrere. Nur bloß die Verschiedenheit der bekannten Zahlen und die Verbindung der zu suchenden mit jenen, hat schon längst die 2 Hauptveränderungen auf 4 unter den Namen der vier Spezies gebracht, welche aber ein neuer Arithmetischer Schriftsteller mit allem Rechte auf 6 erhöhet hat. 1) Es sind nemlich folgende 6 Rechnungsarten: Addition, Multiplikation und Potenz Erhebung, welche die Vermehrung

1) Dieser neue arithmetische Schriftsteller ist der Hr. Prof. Michelsen, welche in seinen Versuchen in sokratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik 1 B. 1784. — Ein Buch voll Gründlichkeit und angenehmen Vortrags — diese 6 Rechnungsarten als 6 Spezies zum ersten Mahle gelehret. Freilich aber waren die 2 hinzugekommenen Spe-

rung enthalten, und Subtraktion, Division und Wurzelausziehung welche die Verminderung der Zahlen enthalten. In allen diesen Rechnungsarten können Decimalen, sowohl Brüche, als ganze mit Brüchen unter den bekannten und den zu suchenden Zahlen vorkommen, und wir müssen sie also darin zu gebrauchen lernen.

§. 17.

Addition und Subtraction.

Zuerst also zur **Addition** und **Subtraktion**, den zwei ersten Spezies, welche einerlei und die leichste Regel haben. — Weil es bei der ersten nur darauf ankommt, wie viel von jeder Ordnung vorhanden, und bei der letztern, wie viel der Unterschied zwischen zwei gleichartigen Ordnungszahlen ist, so ist weiter nichts nöthig, als daß man bei der Addition die Ziffern einerlei Ordnung zusammenaddiret, und bei der Subtraction von einander subtrahiret, kurz: **daß man, wie**

Spezies schon lange vorhanden, nur nicht in die Reihe der Spezies mit gezählt, und dahin gehörend vorgetragen. Michelsen sah nach seinem vortreflich geordneten Plane den Nutzen, wenn man aus Potenzen und Extractionen zwey Spezies der Rechenkunst machte, und es wäre zu wünschen, daß diese beide eben so bekannt seyn mögten, als die ersten 4; aber wie lange wird das nicht bloß Wunsch bleiben? — Noch eine Rechnungsart kann hinzugesetzt werden, nämlich die Expotentiation oder Logarithmen-Lehre selbst: mehrere sind aber nicht möglich, wie sich beweisen läßt.

wie bei ganzen Zahlen, einerlei Ordnungen unter einander setzt, und dann addiret und subtrahirt, wie bei ganzen Zahlen. Das Komma, welche die Einer weiset, wird alsdenn in der Summe oder Differenz unter das Komma zu stehen kommen. Z. B. Es sey zu addiren 0, 42857 .. = $\frac{3}{7}$ und 0, 57142 = $\frac{4}{7}$, so kommt zur Summe

$$\begin{array}{r} \frac{3}{7} = 0,42857\ldots\ldots \\ \frac{4}{7} = 0,57142\ldots\ldots \\ \hline \frac{7}{7} = 1 = 0,99999\ldots\ldots \end{array}$$

diese Summe sollte, wie man sieht = 1, 00000, oder 1 seyn; daß aber 0, 99999 ... kommt, ist eine Folge davon, daß sich $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{7}$ nicht genau in Decimalbrüchen ausdrücken lassen (§. 12. 13): Da nun die summirende Zahlen nicht genau sind, so kann die Summe auch nicht genau werden, der noch 0, 00001, das ist 1 Hundertausendel fehlet; welches aber ein unbeträchtlicher nicht zu achtender Theil ist.

Soll man addiren 34, 072 + 0, 6439 + 2, 007 + 0, 0062 + 137, 9 + 9, 2636475, so ist, nachdem die Posten nach ihren Ordnungen ordentlich unter einander gesetzt sind,

$$\begin{array}{rl} & 34,072 \\ & 0,6439 \\ & 2,007 \\ & 0,0062 \\ & 137,9 \\ & 9,2636475 \\ \hline \text{die Summe} & 183,8927475. \end{array}$$

Dies ist ein Beispiel worin alle möglichen Fälle zusammen vereinigt sind, und man sieht wie Posten von verschiedenen Ordnungen untereinander gesetzt werden. — Diejenigen die bisher die ganzen Zahlen nur so untereinander zu setzen gewohnt sind, daß von allen Posten die letzten Ziffern untereinander zu stehen kommen, ohne zu wissen, warum die Beobachtung dieses Untereinandersetzens die Ziffern der zu addirenden Zahlen so hübsch ordnet, haben hier doppelte Aufmerksamkeit nöthig, indem hier dies kein Mittel zu Abhelfung ihrer Unwissenheit bleibt. Immer müssen aber die Einer untereinander bleiben, dann werden sich die übrigen Ordnungen sowohl zur Linken als zur Rechten derselben leicht ordnen lassen.

Nun ein Paar Beispiele von der Subtraktion.

Von 1, 25 = $\frac{5}{4}$ soll abgezogen werden 0, 5 = $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{rl} & \frac{5}{4} = 1,25 \\ - & \frac{1}{2} = 0,5. \\ \hline \text{bleibt Rest} & \frac{3}{4} = 0,75. \end{array}$$

Weil in der abzuziehenden Zahl, keine Hundertel vorhanden; so mußten die 5 Hundertel in der, von welcher man abzieht zum Rest übrig bleiben. Man kann auch statt 0, 5 setzen 0, 50; dadurch hat man 0, 5 in Hundertel verwandelt, (§. 15.) und dann muß eben das kommen.

Es sey von 89, 27 zu subtrahiren 5, 3987, so ist

89,

89, 2700
5, 3987

der Rest 83, 8713

Hier in diesem Falle, wo die Zahl, von welcher man eine andere subtrahiret, nicht Ziffern von allen den Ordnungen hat, welche die Zahl die subtrahirt wird hat, so denkt oder setzt man in die Stellen der fehlenden Ordnungen Nullen und subtrahiret dann. Denn durch dies Nullensetzen macht man die erstere Zahl zu der Ordnung der Letzteren, und zu Brüchen von einerley Nenner (§. 15.)

Nun wird wohl nicht mehr schwer seyn die Summe von 0,6786597 + 367,26 + 3,907 + 1,0009 + 0,65. + 39,06999 + 0,096 + 678,2, und den Rest von 2,06 — 0,3987632, nähmlich: die Summe 1090, 8625497, und den Rest 1,6612368 zu finden. Zwei Exempel die ich zur Uebung für diejenigen hierher setze, die kein anders Buch haben, worin welche zu finden, und selbst zu erfinden, nicht wagen wollen. Diejenigen welche sich selbst Beispiele machen wollen, können die Richtigkeit ihrer Fazitte durch die bekannten Proben der Addition bei der Subtraktion und der Subtraktion bei der Addition, aber auch durch folgendes Mittel prüfen: wenn sie die Decimalbrüche als ordinaire Brüche schreiben und behandeln. Dadurch werden sie aber

 nicht

nicht allein von der Richtigkeit ihres Fazits überzeuget werden, sondern zugleich den Beweis unsrer Regeln, und mehr Kenntniß von den innern Wesen und den Vortheilen der Decimalbrüche bekommen, wenn sie mit Aufmerksamkeit vergleichen. — Um für jeden deutlich zu seyn, muß ich wohl ein Beispiel der Prüfung von der letztern Art hersetzen. Ich will das vor dieser Anmerkung hergehende zweite Exempel der Subtraktion nehmen. Es ist

$$89,27 = 89\tfrac{27}{100}$$

und $5,3987 = 5\tfrac{3987}{10000}$. Natürlich ists, daß $5\tfrac{3987}{10000}$ von $89\tfrac{27}{100}$ eben soviel geben muß als 5, 3987 von 89, 27 vorhin gab, wenn dies recht seyn soll. Es ist aber

10000 der Hauptnenner

von 89.	$\frac{27}{100}$	100	2700
subt. 5	$\frac{3987}{10000}$	1	3987
83	+		$\frac{8713}{1000}$

also eben viel wie vorhin 83, 8713. Der Aufmerksame sieht hier von neuen den Beweis warum an die 27 Hundertel zwei Nullen gehängt werden müssen, ehe man subtrahirt.

§. 19.

§. 18.

Multiplikation.

Wir kommen nun zur Multiplikation der Decimalen, wo wir eine eben so leichte Regel finden werden, wenn Sie mir nur, auf den schon gebahnten Wege, im Suchen nachfolgen wollen. — Wir wollen einmal die ganze Zahlen 1234 und 567 miteinander multiplizieren, und sehen was für ein Produkt kömmt.

```
   1234  der Multiplikandus ]
    567  der Multiplikator  ] Faktoren
  ------
   8638
  7404
 6170
 ------
 699678  das Produkt oder Faktum
```

Also, entstehet aus 1234 × 567 wenn die beiden Zahlen (Faktoren) unverändert bleiben, das Produkt von 699678 in ganzen Zahlen: wird aber einer der Faktoren verändert, entweder um eine oder mehrere Ordnungen erhöhet, oder um ein oder mehrere Ordnungen erniedriget, so ist kein Schluß natürlich, als daß dann auch das Produkt um so vielmahl erhöhet oder erniedriget werden wird. Setze ich an den Multiplikandus 1234 eine 0, da mache ich ihn um zehnmahl größer, so wird das Produkt 6996780, also auch zehnmahl größer seyn. Mache ich auch den Multiplikator zehnmahl größer, so wird das Produkt 69967800 das ist Hundertmahl größer seyn, weil

durch

durch die Multiplikation der schon zehnmahl größere Multiplikandus noch zehnmahl genommen wird. — Doch die Vergrößerung kann und mag jeder leicht selbst versuchen, die Erniedrung ist jetzt mein Gegenstand.

Gesetzt, ich verändere 1234 in 123, 4; was ist dann geschehen? die Zahl 1234 ist zehnmahl kleiner gemacht, oder jede Ordnung ist um eine erniedriget worden (§. 10.) Unmöglich kann das Produkt von 123, 4 und 567 das vorige bleiben, sondern auch dies muß um zehnmahl kleiner werden, oder jede Ordnung desselben um eine Ordnung erniedriget werden; also muß aus 699678, 69967$\frac{8}{10}$ oder nach Art der Decimalbrüche geschrieben, = 69967, 8, welches denn auch schon daraus folgt, daß die Einer zu Zehntel erniedrigt sind. — In einem der Faktoren war ein Decimalbruch und im Faktum entstand auch einer: dies wollen wir uns vorerst merken.

Verändere ich 1234 in 12, 34, so ist die Zahl 100 mahl kleiner gemacht, und jede Ordnung dadurch um zwey erniedriget. Das Produkt von 1234 $\times$ 567 muß daher ebenfals Hundertmahl kleiner, oder jede Ordnung desselben um zwei erniedriget werden; also statt 699678, 6996, $\frac{78}{100}$ = 6996, 78 entstehen. — Wir merken nun wieder: zwei Decimalbrüche waren bei den Faktoren vorhanden, und im Faktum auch zwei.

Verändere ich 1234 in 1, 234, so ist der eine Faktor des Produkts 699678 um Tausendmahl kleiner gemacht oder jede Ordnung desselben, um 3 Stel-

len

len erniedriget. 699, 678 muß also das Produkt von 1, 234 × 576 seyn. Der eine Faktor hatte 3 Decimalbrüche und daher das Produkt auch.

Verändere ich 1234 in 0, 1234 so ist dieser Faktor des Faktums, um 10tausendmahl kleiner oder jede Ordnung ist um 4 Ordnungen erniedriget worden. Das Faktum muß also statt 699678, 69, 9678 seyn; denn 4 Stellen waren in dem einen Faktor Brüche, also auch ebensoviel im Produkte.

Verändere ich einmal den andern Faktor 567 in 56, 7 und lasse den Multiplikandus 1234 ohnverändert, so muß ein zehnmahl kleineres Produkt also 69967, 8 kommen, weil der Multiplikandus zehnmahl weniger genommen wird. Es ist also wiederum ein Decimalbruch in einem der Faktoren und also einer im Produkte.

Verändere ich 567 in 5, 67 und den in 0, 567, in 0, 0567 u. s. w. so wird dieser Faktor hundert-Tausend, zehntausendmahl kleiner, und muß ein eben so vielmahl kleineres Produkt 6996, 78, 699, 678, 69, 9678, geben: im Faktum entstehen also eben soviel Decimalbrüche, als im Multiplikator vorhanden sind.

Aber wie, wenn ich die ganzen Zahlen 1234 und 567 in 12, 34 und 56, 7 veränderte, wie würde das Produkt 699678 aussehen? — Der Multiplikandus ist hundertmahl kleiner, und dieserwegen müßte das Produkt auch hundertmahl kleiner, also 6996, 78 seyn;

weil

ganze Zahlen wären, im Produkte schneidet man aber von der Rechten gegen die Linke so viel Ziefern für Dezimalbrüche ab, als deren in den beiden multiplizirten Faktoren zusammengenommen vorhanden sind; reichen die würklichen Ziffern zum Dezimalbrüchen nicht zu, so setzt man an die fehlende Stellen Nullen vor, und dann noch eine Null in die Stelle der Einer, vor das Komma. Wie leicht! — Aber darum dürfen doch die Gründe nicht fehlen.

In den Paar Beispielen, die ich noch zu geben gedenke, werde ich nun kürzer seyn können. 0,567 mit 3,67 multiplizirt, ist 2,08089; denn das Produkt, wenn ganze Zahlen wären, wäre 208089 wovon aber 3 + 2 = 5 Ziefern zu Dezimalbrüchen abgeschnitten werden müssen. 0,00685 mit 0,362 multipliziret, giebt 0,00247970 = 0,0024797 zum Produkt; denn 685 $\times$ 362 ist = 24797, welches aber 8 Ordnungen erniedrigt werden muß, weil in den Faktoren 5 + 3 = 8 Stellen Dezimalbrüche sind. Es sind aber nur 6 Ziefern vorhanden, darum müssen noch zwei Nullen vor, und ausserdem eine in die Stelle der Einer gesetzt werden.

Eine Anmerkung muß ich diesem langen Abschnitte doch noch anhängen. Unsere Absicht erfodert zuweilen nicht alle Ziffern eines Produkts, weil wir in unsrer Rechnung nicht auf sehr kleine Theile sehen, und dann läßt man eine oder mehrere von den niedrig-

sten

sten Ordnungen weg. Um aber den dadurch entstehenden Fehler in etwas zu ersetzen, so addiret man zu der lezten noch bleibenden Ziefer 1, wenn die erste oder beiden ersten der weggelassenden Ziefern mit 10 oder 100 dividirt, sehr nahe an $\frac{1}{2}$ gränzen, oder $\frac{1}{2}$ selbst ausmachen oder darüber ist. z. B. Es erforderte die Genauigkeit nur, das Produkt des lezten Beispiels auf 5 Dezimalbrüche zu wissen, so würden die beiden Ziffern 97 weggelassen; weil aber $\frac{9}{10}$ oder $\frac{97}{100}$ über $\frac{1}{2}$ und nahe an die Einheit grenzt, so setzt man zu der lezten Ziefer der bleibenden Zahlen 0,00247, Eins zu, so daß 0,00248 entstehet.

Es giebt mehrere Wege zur Wahrheit, und so auch hier. Wer sich die Mühe nimt, die Faktorn als ordinaire Brüche zu schreiben und in der Multiplikation als solche zu behandeln, der wird auch dadurch unsere Regel bestätiget finden. Z. B. Es sey zu multiplizieren 1,36 mit 0,086 so ist nach unsrer Regel $136 \times 86 = 11696$, und folglich $1,36 \times 0,086 = 0,11696$. Eben dies finden wir bestätiget, wenn wir setzen:

$$1,36 = 1\tfrac{36}{100} = \tfrac{136}{100}$$
$$0,086 = \tfrac{86}{1000}$$

multiplizirt giebt $\frac{136 \times 86}{100 \times 1000} = \frac{11696}{100000}$

das ist nach Art der Dezimalbrüche geschrieben $= 0,11696$.

§. 19.
Division.

Zu Erfindung der Regeln zur Division werden wir uns eines ähnlichen Weges bedienen; nur drei Stationen wird er haben müssen, weil die Beschaffenheit der zwei bei der Division vorkommende Zahlen, der Divisor und Divident, sie nöthig machen. Ich will vorerst die Zahl 835047 durch 123 Dividiren und sehen was herauskommt.

```
                 Dividendus
Divisor  123 ) 835047 ( 6789  Quotient
               738
               ---
                970
                861
                ---
                1094
                 984
                ----
                 1107
                 1007
                 ----
                    0
```

Der Divident und der Divisor sind ganze Zahlen, und der Quotient muß es also auch seyn: aber was würde er seyn, wenn der Divident = 83504,7 wäre, der Divisor aber derselbe bliebe?

Wäre der Divident 83504700, das ist Hundertmahl größer, so wäre der Quotient 678900; also auch hundertmahl größer. Wäre der Divident 8350470, das ist, zehnmal größer, so wäre auch der Quotient 67890; also auch zehnmal größer als oben. Aber der Divident ist auch zehnmal kleiner, als der vorige,

und

und der gekommene Quotient auch. Was folgt hieraus natürlicher, als daß um so vielmahl der Divident grösser wird, auch der Quotient größer werde; und um so vielmahl der Divident kleiner wird, auch der Quotient kleiner werde? 835047 mit 123 dividirt giebt 6789; wird der Divident in 83504,7 verwandelt, so ist derselbe um zehnmahl kleiner geworden, und der Quotient der aus den zehnmahl größeren entstand, muß also auch zehnmahl kleiner werden; also aus 6789 muß 678,9 werden.

Mache ich aus den Dividenten 83,5047, das ist, mache ich ihn 10 tausendmahl kleiner, so muß natürlicherweise auch ein 10 tausendmahl kleinerer Quotient, also 0,6789 kommen. Der Quotient ist also den Ziefern nach, woraus er bestehet, eben derselbe, als wenn der Divident eine ganze Zahl wäre, nur aber nicht der Ordnung nach, und diese richten sich ganz nach den Dividenten: gerade eben so viel niedrige Ordnungen, wie der hat, muß der Quotient auch bekommen. Hieraus entstehet dann die Regel für den bei der Division der Dezimalbrüche vorhandenen Ersten Fall, **wenn der Divident Dezimalbrüche, der Divisor aber keine hat: dann dividiret man, wie in ganzen Zahlen, ohne auf die Dezimalbrüche im Dividenten zu sehen, und schneidet im Quotienten von Rechten gegen die Linke so viel Ziefern zu Dezimalbrüche ab, als deren im Dividenten vorhanden sind.** — Also wenn ich 1707,75

 durch

durch 7425 dividire, so kommt, wenn ich alles als ganze Zahlen betrachte, zum Quotienten 23; weil nun im Dividenten Hundertel oder 2 Ziefern als Dezimalbrüche vorhanden sind, so müssen eben so viel im Quotienten Statt finden, das ist, es muß aus 23, 0,23 werden; denn nun ist auch der Quotient Hundertmahl kleiner, als wenn es eine ganze Zahl wäre.

Nun wollen wir den Divident unverändert lassen, aber den Divisor verkleinern; wollen vorerst 123 in 12,3 verändern; was kommt dann zum Quotienten? Es wird leicht zu beantworten seyn, wenn man bedenkt, was der Quotient ist: Er ist die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Zahl des Divisors in der Zahl des Dividents enthalten ist. Und muß denn nicht dieser um so vielmahl größer werden, als der Divisor kleiner wird? denn die Hälfte muß doch nothwendig noch einmahl so viel, und das Zehntel doch zehnmahl so viel mahl darin enthalten seyn, als das Ganze. Dividire ich 8 durch 4, so kommt 2; dividire ich aber 8 durch die Hälfte der 4, so kommt ein noch einmahl so großer Quotient, nähmlich 4. Dividire ich 400 durch 80, so kommt 5; dividire ich 400 aber durch das Zehntel von 80, nähmlich mit 8, so kommt ein zehnmahl größerer Quotient, das ist 50. Mache ich also einen Divisor hundertmahl kleiner, so muß der Quotient auch hundertmahl größer, und mache den Divisor zehntausendmahl kleiner, so muß der Quotient auch zehntausendmahl größer werden.

Ver-

Verändert man also unsern Divisor 123 in 12,3 so ist er 10 mahl kleiner geworden, und der Quotient 6789 muß daher 10 größer, das ist aus 6789 muß 67890 werden. Verändert man 123 in 0,123, das ist, macht man ihn tausendmahl kleiner, so muß der Quotient tausendmahl größer, also aus 6789 muß 6789000 werden. Wer sieht nicht deutlich, daß man nur dem Quotienten den man erhält, wenn die Zahlen ganze Zahlen wären, soviel Nullen anzuhängen brauche als im Divisor Ziefern zu Dezimalbrüche vorhanden sind. Und wer dieß einsieht, der weiß auch die Regel zum 2ten Fall aus der Division der Dezimalbrüche, **wenn der Divisor allein Dezimalbrüche hat, und der Divident nicht: dann dividirt man als wenn der Divisor eine ganze Zahl wäre, und setzt den Quotienten so viel Nullen bei, als der Divisor Dezimalbrüche hat.** — Wem kann es hiernach wol schwer seyn 16777216 mit 16,384 zu Dividiren? Er denkt 16,384 sey 16384 und dividirt nun, wie ers gelernt hat. Der Quotient den er bekommt, wird dann 1024 seyn; weil aber sein Divisor nicht 16384 sondern ein tausendmahl kleiner, 16,384, ist, so muß dieser Quotient auch tausendmahl größer seyn, das ist, er setzt der Zahl 1024 noch so viel Nullen bei, als der Divisor Dezimalbrüche hat, das ist drey, und dann wird selbiger 1024000.

Aber, wenn beide, Divident und Divisor Dezimalbrüche haben, wie dann? — Vielleicht kommen einige meiner Leser auf den Gedanken, daß, da nun beide Zahlen verändert worden. auch beide Veränderungen auf den Quotienten würken müssen. Sie haben Recht. Wie ist aber die Würkung beschaffen? Sie ist einander entgegengesetzt: die Veränderung des Dividenten würket Verminderung, und die des Divisors würket Erhöhung. Ihre Würkungen müssen sich also ganz, oder zum Theil aufheben: ganz, wenn beide, der Divident und Divisor, um gleichviel Dezimalstellen verringert sind; und zum Theil, wenn der eine um mehr Stellen verringert ist, als der andere; und dann muß vom Dividenten und Divisor der auf den Quotienten würken, welcher am mehrsten verringert ist, und zwar um so viel, als von dem andern nicht aufgehoben wird: der Divident so viel Verringerung, der Divisor so viel Erhöhung. — Doch ich muß mich deutlicher erklären. 8000000 durch 2000 dividirt ist 4000: dies Beispiel soll zur Erläuterung dienen. Wir wissen schon, daß der Divident zehnmahl kleiner gemacht, bei unverändertem Divisor, den Quotienten auch zehnmahl kleiner macht; wir wissen, daß der Divisor zehnmahl kleiner gemacht, bei unverändertem Dividenten, den Quotienten um zehnmahl erhöhet: ist nun Divident und Divisor zugleich zehnmahl verringert, so wird der Quotient wegen des Dividents zehnmahl verringert, und wegen des Divisors zehnmahl

er-

erhöhet; was ist das aber anders, als der Quotient bleibt ohnverändert? denn was ich zehnmahl vermindere und dann wieder eben so vielmahl erhöhe, muß so viel wieder werden, als es war. Wem fält das nicht sogleich in die Augen? Mache ich aus den Dividenten 8000000, 800000, das ist zehnmahl kleiner, und aus den Divisor 2000, 200, auch zehnmahl kleiner, und dividire nun, so kommt 4000 wie vor der Verminderung. Und eben das mußte folgen, wenn ich beide, den Dividenten und Divisor um Hundert, Tausend rc. mahl verringerte. Gesetzt aber ich machte einen Dividenten tausendmahl, und seinen Divisor zehnmahl kleiner, so würde aus dem schon bekannten ganz natürlich folgen: daß der Quotient, welcher entstehet, wenn alles ganze Zahlen sind, dann wegen des Dividents auch tausendmahl kleiner, wegen des Divisors aber wiederum zehnmahl größer werden müsse: was ist das aber anders, als der Quotient wird hundertmahl kleiner? denn die eine zehnmahlige Verkleinerung wird durch die eben so große Vergrößerung wieder aufgehoben; und der Quotient bekäme also so viel Dezimalbrüche, als im Dividenten deren mehr wie im Divisor sind. Man mache aus 8000000, 8000 und aus 2000, 200, so wird der Quotient 40 seyn, das ist also um hundertmahl kleiner als vorhin. Leicht wird es nun seyn, diese Schlüsse auf den Fall anzuwenden, daß der Divisor mehr verringert ist, als der Divident. Wir wollen unsern vorigen Fall umwenden: der Di-

 visor

visor soll tausendmahl, und der Divident zehnmahl kleiner seyn, so wird der Quotient wegen des Divisor um tausendmahl grösser, und wegen des Dividents um zehnmahl kleiner werden; er wird aber nur hundertmahl grösser bleiben, weil die zehnmahlige Erniedrigung des Dividents eine zehnmahlige Erhöhung des Divisors aufhebet. Wird aus den Divisor 2000,2 und aus den Dividenten 8000000, 800000, gemacht, so ist der Quotient 400000, das ist also hundertmahl grösser als vorhin. Eben so verändere ich in den, bei den vorigen beiden Fällen gebrauchte Erläuterungs-Beyspiel, den Divident 835047 in 83,5047 und den Divisor 123 in 1,23, muß der Quotient 6789 wegen des Dividents in 0,6789 verwandelt, d. i. zehntausendmahl kleiner; wegen des Divisors aber wiederum hundertmahl grösser, also 67,89 werden. Verändere ich aber den Divident 835047 in 8350,47 und den Divisor 123 in 0,123; muß der Quotient, der aus den Zahlen als ganze Zahlen entstehet, 6789, wegen des Dividents um Hundertmahl kleiner, also 67,89 werden; hingegen muß wegen des Divisor dieser Quotient um tausendmahl grösser, also 67890 werden. Ich glaube jeder findet hieraus von selbst die Regel für den 3ten Fall, wenn Divident und Divisor Dezimalbrüche haben. Man dividiret nähmlich, die Zahlen als wenn es ganze Zahlen wären. Dann ziehet man die kleinere Anzahl der Dezimalbrüche von der grössern ab,

und

und schneidet so viel als Stellen, als der Rest anzeigt, vom Quotienten zu Dezimalbrüche ab, wenn der Divident die größere Anzahl hat; hat aber dieselbe der Divisor so setzet man dem Quotienten so viel Nullen bei. Z. B. 61,7076 durch 7,32 dividirt ist = 617076 : 732 = 843 wovon 43 Dezimalbrüche sind, weil im Divident 4 und im Divisor 2 Dezimalbrüche sind, und also 4 weniger 2, das ist 2 Ziefern zu Dezimalbrüche müssen abgeschnitten werden. Soll 20761,6 durch 3,244 dividirt werden, so ist 207616 : 3244 = 64, und weil nun im Divisor 2 Dezimalbrüche mehr sind, wie im Divident, so muß an diese 64 noch 2 Nullen angehängt werden; und dann wird es 6400.

Diejenigen meiner Leser, welche sich von diesem Allen noch durch einen andern Weg überzeugen wollen, können die Decimalbrüche eine Zeitlang als ordinaire Brüche betrachten; Sie werden ganz, die auf unserm genommenen Wege gefundenen Regeln, von neuen bestätiget finden. Ich will noch kurz diese Bestätigung selbst vorlegen.

1.) Soll ich 42, 435 mit 345 Dividiren so ist nach unsrer Regel 0, 123 der Quotient, und ich setze statt 42, 435, $42\frac{435}{1000}$ und dividire dann mit 345, so ist

345) $42\frac{435}{1000}$ eingerichtet

1000   42435

345000 in 42435 zu dividiren, oder weil

visor soll tausendmahl, und der Divident zehnmahl kleiner seyn, so wird der Quotient wegen des Divisor um tausendmahl größer, und wegen des Dividents um zehnmahl kleiner werden; er wird aber nur hundertmahl größer bleiben, weil die zehnmahlige Erniedrigung des Dividents eine zehnmahlige Erhöhung des Divisors aufhebet. Wird aus den Divisor 2000,2 und aus den Dividenten 8000000, 800000, gemacht, so ist der Quotient 400000, das ist also hundertmahl größer als vorhin. Eben so verändere ich in den, bei den vorigen beiden Fällen gebrauchte Erläuterungs-Beyspiel, den Divident 835047 in 83,5047 und den Divisor 123 in 1,23, muß der Quotient 6789 wegen des Dividents in 0,6789 verwandelt, d. i. zehntausendmahl kleiner; wegen des Divisors aber wiederum hundertmahl größer, also 67,89 werden. Verändere ich aber den Divident 835047 in 8350,47 und den Divisor 123 in 0,123; muß der Quotient, der aus den Zahlen als ganze Zahlen entstehet, 6789, wegen des Dividents um Hundertmahl kleiner, also 67,89 werden; hingegen muß wegen des Divisor dieser Quotient um tausendmahl größer, also 67890 werden. Ich glaube jeder findet hieraus von selbst die Regel für den 3ten Fall, wenn Divident und Divisor Dezimalbrüche haben. Man dividiret nähmlich, die Zahlen als wenn es ganze Zahlen wären. Dann ziehet man die kleinere Anzahl der Dezimalbrüche von der größern ab,

und

und schneidet so viel als Stellen, als der Rest anzeigt, vom Quotienten zu Dezimalbrüche ab, wenn der Divident die größere Anzahl hat; hat aber dieselbe der Divisor so sezet man dem Quotienten so viel Nullen bei. Z. B. 61,7076 durch 7,32 dividirt ist = 617076 : 732 = 843 wovon 43 Dezimalbrüche sind, weil im Divident 4 und im Divisor 2 Dezimalbrüche sind, und also 4 weniger 2, das ist 2 Ziefern zu Dezimalbrüche müssen abgeschnitten werden. Soll 20761,6 durch 3,244 dividirt werden, so ist 207616 : 3244 = 64, und weil nun im Divisor 2 Dezimalbrüche mehr sind, wie im Divident, so muß an diese 64 noch 2 Nullen angehängt werden; und dann wird es 6400.

Diejenigen meiner Leser, welche sich von diesem Allen noch durch einen andern Weg überzeugen wollen, können die Decimalbrüche eine Zeitlang als ordinaire Brüche betrachten; Sie werden ganz, die auf unserm genommenen Wege gefundenen Regeln, von neuen bestätiget finden. Ich will noch kurz diese Bestätigung selbst vorlegen. 1.) Soll ich 42, 435 mit 345 Dividiren so ist nach unsrer Regel 0, 123 der Quotient, und ich setze statt 42, 435, $42\frac{435}{1000}$ und dividire dann mit 345, so ist

$$345) \quad 42\frac{435}{1000} \text{ eingerichtet}$$

$$\frac{1000 \quad 42435}{345000 \text{ in } 42435}$$ zu dividiren, oder weil

 345000

345000 = 345 × 1000 ist, so ist 42435 erst mit 345 und dann mit 1000 zu dividiren. 42435 durch 345 dividirt ist 123 und diese durch 1000 $= \frac{123}{1000}$ das ist in Decimalbrüchen 0, 123. 2.) Soll ich 9683 mit 4, 21 Dividiren, so kömmt nach unserm gehabten 2ten Falle 2300. Hier muß ich statt 4, 21, $4\frac{21}{100}$ schreiben, und nun nach den Regeln der Brüche dividiren: nähmlich

$$\begin{array}{ll} 4\frac{21}{100} & 9683 \\ 421 & 100; \end{array}$$

also 9643 durch 421 dividiren, und dann den Quotienten 100 mahl nehmen. 9643 : 421 ist 23 und 23 hundertmahl ist 2300, also auch so wie oben. 3.) Soll ich 175, 4994 durch 56, 21 dividiren, so bringe ich, nach der Regel unsers 3ten Falls, 3, 14 heraus. Setze ich statt 175, 4994 nun $175\frac{4994}{10000}$ und statt 56, 21, $56\frac{21}{100}$ und dividire nach den Regeln der Brüche so entsteht:

$$\begin{array}{lcl} 4\frac{21}{100} & \text{in} & 175\frac{4994}{10000} \\ 421 & & 1\not{0}\not{0} \\ 100\not{0}\not{0} & & 1754994; \end{array}$$

also 1754994 muß ich durch 421 mahl 100 dividiren. 1754994 durch 421 giebt 314 und dies durch 100 giebt $\frac{314}{100} = 3\frac{14}{100} = 3,14$ wie ich vorhin auch bekam. Also unsere vorigen Regeln sind von neuen bestätiget und dadurch unsre Ueberzeugung vermehrt worden.

§. 20.

§. 20.

Fortsetzung der Regeln zur Division.

In vorigen Paragraphen sind die Regeln für die Division so weit gegeben, bis daß die Division aufgeht, oder ein Rest bleibt, worin nicht mehr dividirt werden kann; die Beispiele sind immer aufgegangen, wie es aber mit dem Reste aussieht, der doch ohnfehlbar oft übrig bleibt, ist nichts gesagt worden: und das muß ich nun noch nachholen. Gesetzt es sollte 2,56 mit 2,4 dividirt werden, so kommt nach der Regel des 3ten Falls aus vorigen §. zum Quotienten 1,0 und bleibt ein Rest von 16 oder eigentlicher 0,16. Er wäre also ein Bruch von $\frac{0,16}{2,4}$ zum Quotienten 1,0 zuzusetzen. Der Begriff von diesem Bruche würde dunkel seyn, und man muß ihn in Decimalbrüche zu verwandeln wünschen. — Wer die §. §. 12 bis 14 gelesen und verstanden hat, wird an 0,16 soviel Nullen anhängen, als die niedrige Ordnung erfodert, zu welcher er den Bruch haben will. Hier muß er aber auch bedenken das 16 nicht Ganze, sondern Hundertel sind, und daher von Hundertel mit der Beysetzung der Nullen angefangen werden muß. Zu 0,16 müssen also 5 Nullen zugesetzt werden, wenn ich Milliontel erhalten will, weil 0,1600000, 16 Milliontel sind. (§. 15.) Wird nun mit 2,4 dividirt, so ist nach dem 3ten Fall aus dem vorigen Paragraphen der Quotient 0,066666, mit einem abermahl übrig bleibenden Reste 16, oder eigentlich 16 Milliontel, welche noch in 2,4 Theile ge-

theilet

theilet werden sollen. Ein Milliontel ist schon ein unbeträchtlicher Theil des Ganzen, und kann man diesen Rest für nichts achten: wäre aber noch grössere Genauigkeit nöthig, so kann die Division, durch jede Anzahl mehrerer Nullen weiter fortgesetzt werden. Unser erster Quotient aus 2,56 : 2,4 war 1,0 und der bleibende Rest in Decimalbrüche verwandelt, ist 0,066666, beide zusammen ist 1,066666 der Quotient von 2,56 dividirt durch 2,4 bis Milliontel fortgesetzt. Man hätte aber auch ohne den Rest 0,16 erst mit 2,4 als einen Bruch anzusehen, eben den Quotienten finden können, wenn man an 16 erst eine Null und dann nach und nach mehrere Nullen angehängt, und mit 24 zu dividiren fortgefahren hätte, bis der Quotient zu Milliontel entstanden wäre. Nähmlich so:

```
24)    256 | 1,066666
        24 |
Rest   160
       144
        160
        144
         160
         144
          160
          144
           160
           144
Rest       16 der für nicht geachtet wird.
```

Aus

Aus diesem Beispiele können wir also die Regel für den Fall herleiten, daß nach der Division ein Rest bleibt: Man dividiret erst ganz nach der Regel, welche die Beschaffenheit der Zahlen erfodert, und nachdem man nach selbiger den gekommenden Quotienten eingerichtet, hänge man an den Rest nach und nach soviel Nullen und setze die Division soweit fort, als unsere Absicht es erfodert. Der Quotient der aus der Division des Restes mit den nach und nach angehängten Nullen entstehet, setzet man den eingerichteten Quotienten, der aus der ersten Division entstanden, unmittelbar bei, so ist alles zusammengenommen der Quotient aus den erst gegebenen Dividenten in Decimaltheilen fortgesetzt.

Mit noch einem Exempel über diesen Fall will ich die Division beschliessen. Es sey 36, 2079 der Divident, 0, 00092 der Divisor, welches ist der Quotient? Nach der 3ten Regel des vorigen §. geschiehet zuerst die Division, als wenn die Zahlen 362079 und 92 wären, und dann würde dem Quotienten eine Null angehängt werden, weil im Divisor ein Decimalbruch mehr, als im Dividenten ist.

0,00092)

```
0,00092)   36,2079 | 39350,6413
           276
           860
           828
           327
           276
           519
           460
bleibt ein Rest = 590   mit der Null welche erst
welchem man nach  552   angehängt worden
und nach Nullen   380
anhängt, und wei- 368
ter dividiret     120
                   92
                  280
                  276
                    4  ein sehr kleiner Rest,
```

nemlich 4 Zehntausendel, die noch in 0,00092 Theile oder 4 noch in 92 Theile getheilt werden sollen, welches kein Hunderttausendel geben würde.

§. 21.

Ausziehung der Wurzel aus Decimalbrüche.

Nun ist noch übrig meinem Lesern die Ausziehung der Wurzeln aus Decimalbrüche zu zeigen. Es wird mir das nicht schwer seyn, wenn Sie die Ausziehung in ganzen Zahlen wissen: und diese muß ich voraus setzen, weil Sie sonst, wenn Ihnen die Extraction der Quadratwurzeln fehlt, die Entstehung unserer Loga-

garithmen nie verstehen werden. Vielleicht für einigen eine schwere Forderung; aber mich dünkt, wem die Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzeln fremd sind, kann ohnmöglich auf den Namen eines Rechners Anspruch machen; oft wird er mit seiner Arithmetik scheitern, wenn ihm die Kenntnissen von Potenzen und Ausziehung der Wurzeln aus Quadrat- und Kubik-Zahlen fehlen. Wenn ich hier diese Extraction erst lehren wollte, so würde ich zu sehr ausschweifen genug, daß mir diese Vorbereitung zu einer Stärke anwächst, die ich selbst nicht vermuthete. Doch — ich wollte ja von der Extraction der Wurzeln aus Decimalen reden.

Wenn eine Quadrat- und Kubik-Zahl keine genaue Wurzel in ganzen Zahlen hat, so hängt man an den bleibenden Rest bei Quadratzahlen 2 Nullen, bei Kubik-Zahlen aber 3 Nullen an, und setzt die Ausziehung weiter fort, und dann entstehet bei dem einen und dem andern eine Wurzel in Decimalbrüchen, die der ganzen Wurzel angehängt werden: nähmlich, aus den Rest und den ersten angehängten Nullen entstehen die Zehntel, aus dem wieder bleibenden Reste mit den beigesetzten Nullen die Hundertelund so weiter aus jedem folgenden Reste und angehängten Nullen eine folgende niedrige Ordnung. — Zum Beispiele will nur eine Quadratzahl wählen. Es sey aus 10 die Quadratwurzel zu extrahiren (eine Wurzel welche wir weiter hin vielleicht einmahl nöthig haben;) so ist

aus

aus 10 | 3 die nächste Wurzel in ganzen Zahlen.
9

und bleibt Rest 1 welchem 2 Nullen anzuhängen u. dann weiter zu extrahiren ist.

Divisors: 6) 100 | 0,162277
+ 6
1
61

Rest 3900 mit 2 Nullen
62) 372
+ 36
3756

Rest 14400 mit 2 Nullen
632) 1264
+ 4
12644

Rest 175600 mit 2 Nullen
6324) 12648
+ 4
126484

Rest 4911600 mit 2 Nullen
63244) 442708
+ 49
4427129

Rest 48447100 mit 2 Nullen
632454) 4427178
+ 49
44271829

Rest 4175271

Dieser letzte Rest ist 4175271 Milliontel, woraus die Wurzel sehr unbeträchtlich seyn würde, und

wir

wir machen daher hier ein Ende; denn setzten wir das Anhängen der Nullen und das Ausziehen bis in Ewigkeit fort, so würden wir eine genaue Wurzel nie erreichen. Die durch das Anhängen der Nullen entstandene Dezimalbrüche sind 0,162277 und die Wurzel in ganzen Zahlen ist 3, also ist aus 10 die Quadratwurzel bis zu Milliontel fortgesetzt = 3,162277.

§. 21.

Fortsetzung.

Voriges war also ein Beispiel, wie man aus einer ganzen Zahl, welche aber keine vollkommene Quadratzahl ist, die Wurzel durch Annährung in Decimalbrüchen findet; und bei den unvollkommenen Kubikzahlen geschiehet diese Annährung, wenn man die nöthigen Regeln dabei beobachtet, auf eine ähnliche Weise. Wie aber extrahiret man da, wo die gegebene Quadrat- oder Kubik-Zahl, blos ein Dezimalbruch oder Ganze mit einem Dezimalbruch ist? — Es hat dies nicht die geringste Schwerigkeit, meine Leser, extrahiren Sie nur immer hin, so wie Sie's gelernet haben, aber nehmen Sie bei der Eintheilung in Fächer folgendes in Acht: **Fangen Sie die Eintheilung bei den Komma an, und gehen damit rechts, wenn blos Dezimalbrüche zugleich da sind**; dann werden Sie aus den Ganzen eine Wurzel in ganzen Zahlen, und aus dem etwa bleibenden Reste von den Ganzen und den Dezimalbrüchen, die Fortsetzung der Wurzel im Dezimalbrüchen finden. Fol-

gende zwei Exempel können die Sache sinnlicher machen. Aus 0,033856 und 96,6289 soll die Quadratwurzel gefunden werden. 0,033856 würde also eingetheilt so aussehen: 0,|03|38|56, und 96,6289 sieht so aus 96,|62|89. Die Ausrechnung ist

```
      0,|03|38|56 | 0,184 die Quadratwurzel
        | 1|  |   |
  2)      2|38|
        {1 |6 |
        {  |64|
  36)     2|24|
            14|56
          {14 |4
          {   |16
            14|56
               0
```

```
Aus 96,|62|80 | ist 9,8299 die Quadratwurzel
    81 |  |
 18) 15|62|
    {14|4 |
    {  |64|
     15|04|
 196)  58|80
      {39|2
      {  | 4
       39|24
 Rest  19|5600 mit 2 Nullen
 1964) {17 676
       {     81
        17 6841
 Rest   1875900 mit 2 Nullen
```

19658)

19658) 176922
81

1769301

Rest 106599.

Es kann sich der Fall ereignen, daß beim Einheizen der Dezimalbrüche, das letzte Fach nicht die zu einem Fache gehörende Anzahl Ziefern hat: dann füllt man diese Lücke mit Nullen aus. z. B. es wäre aus 962,3567 die Kubikwurzel zu extrahiren, so entstände durch die Eintheilung dieser Zahl: 962,|356|7 und fehlte also am letzten Fache noch zwei Ziefern an deren Stelle man hier ein Paar Nullen setzt, so daß 962,|356|700 daraus wird.

§. 22.

Etwas von den Kennzeichen vollkommene Quadrat- und Kubikzahlen zu erkennen.

Genauigkeit im Rechnen muß ich hier besonders empfehlen. Wären alle Quadrat und Kubikzahlen vollkommen, so daß eine genaue Wurzel daraus gefunden werden könnte und am Ende kein Rest bliebe, so könnte man die Behandlung wiederholen: aber wie wenig sind derer, unter den unendlich vielen Zahlen? — Ich glaube, so ganz am unrechten Orte würde hier das Kennzeichen nicht stehen, wovon man eine vollkommene Quadrat und Cubikzahl erkennen könne; aber ich werde keines hierher setzen können. Warum? — Weil kein solches Kennzeichen vorhanden ist, das uns mit Zuverläßigkeit sagte; diese ist eine voll-

kommene Quadrat- oder Kubikzahl, und jene nicht. Alle die man davon weiß, geben nur einen Grad von Wahrscheinlichkeit, daß diese oder jene Zahl eine vollkommene sey. Für die Quadratzahl merke man aber: 1) alle Zahlen deren lezte Ziefer 2, 3, 7 oder 8 ist, ist keine vollkommene Quadratzahl. 2) Zahlen, welche jene Ziefern nicht am Ende haben, kann man noch auf folgende Art probiren:

a) man sucht die Quersumme, bleibt dann, nachdem man sie mit 3 dividirt nichts oder 1; wenn man sie mit 9 dividirt, 1, 4 oder 7 übrig, so ist es wahrscheinlich, daß die untersuchte Zahl eine vollkommene Quadratzahl sey.

b) dividiret man die letzte Ziefer mit 5, und es bleibt nichts oder 1 oder 4 zum Rest, so steigt diese Wahrscheinlichkeit.

c) dividiret man bei geraden Hunderten, die 2 lezten Ziefern, bei ungeraden Hunderten aber diese 2 lezten Ziefern und 4 mit 8, und es bleibt nichts, oder 1 oder 4 übrig, so steigt der vorige Grad der Wahrscheinlichkeit eine Stuffe höher.

Will man demselben noch eine Stuffe erhöhen, so dividire man die Zahl durch 7, bleibt dann nichts, oder 1, 2 oder 4 übrig so ist es selten, daß alsdann dennoch die Zahl keine vollkommene Quadratzahl seyn sollte; aber zuverläßig sicher ist sie's nicht: alle diese Proben kann sie aushalten, und doch unächt seyn. — Bei Kubikzahlen schränken die folgenden Kennzeichen nicht

nicht so ein, wie bei Quadratzahlen: schon das erste doch aber wichtige Kennzeichen, fällt hier ganz weg. Wenn man 1) die Quersumme von der Zahl sucht, und diese Summe mit 9 dividiret, und dann nichts, oder 1 oder 8 übrig, so ist es wahrscheinlich, daß es eine vollkommene Kubikzahl sey. 2) Wenn man auch hier, wie bei der Untersuchung der Quadratzahlen, mit 8 dividiren, und es bleibt nichts als 1, 3, 5 oder 7 übrig, so ist jene Wahrscheinlichkeit einen Grad gestiegen. 3) Dividirt man auch mit 7, und es bleibt nichts, oder 1 oder 6 übrig, so nähert man sich der Gewißheit, aber erreicht hat man sie nicht.

— Hier also, Freunde der Analysis, hier ist eine Lücke, *) deren Ausfüllung man von Ihnen erwartet! Hier ist noch ein Plaz in der Reihe der Erfinder: wer will ihn einnehmen?

Etwas von entgegengesezten Zahlen.

Jezt steht ein neuer Gegenstand vor uns, welchem wir unsre Aufmerksamkeit widmen müssen. Würklich neu ist er zwar uns allen nicht, aber manche von meinen Lesern werden unachtsam vorbei-

*) Mir sind wenigstens, alles Suchens ohngeachtet, keine bis zur Gewißheit führende Kennzeichen vorgekommen: und der würde das arithmetische Publikum und mich sehr verbinden, der, wenn welche vorhanden, solche allgemein bekannt machte.

beigegangen seyn, und wenn Sie nun denselben, ganz mit der Mine von Wichtigkeit, mit mir betrachten wollen, werden Sie würklich vieles neu finden, was sie lange mit einem flüchtigen Blicke übersehen hatten. Wir müssen hier verweilen, wenn wir einst hoffen wollen von den Logarithmen gründliche Kenntniß und brauchbare Anwendung zu erlangen.

§. 23.

Einleitung. Absolute Zahlen.

Wenn ich mich hinsetze und den Werth der Theile meines Vermögens nach und nach aufschreibe, was kann die Summme davon anders geben, als meine Vermögen; und verzeichne ich eben so mein Schuldposten, so wird aus der Summe nichts anders als Schuld, nie Vermögen; und nichts anders werd' und kann ich bei beiden denken: als dieß ist Vermögen und dieß Schuld, beides würkliche Geldsummen: so lange ich nemlich in meinen Schlüssen nicht weiter gehe. — Will ich jemand meine Einnahme und Ausgabe sagen, so sage ich, z. B. 400 Rthlr. Einnahme und 300 Rthlr. Ausgabe: und so einzeln haben diese beiden Zahlen nicht die geringste Verbindung, nicht die geringste Würkung auf einander; jeder denkt sie als zwei würkliche jede für sich bestehende Geldsumme. Solche Zahlen nun, pflegt man absolute Zahlen zu nennen.

Anders

Anders aber siehet es damit aus, wenn man sie in Verbindung denkt; dann würken sie, als Zahlen einander entgegenstehender Handlungen und Umstände, entgegengesetzt auf einander. — Denke ich mir noch soviel Einnahme zusammen, so werde ich auf die Frage: was entstehet? nichts als Einnahme antworten können; und verbinde ich noch soviel Ausgaben, nach der Verbindung wird nichts als Ausgabe entstehen. Aber was wird entstehen, wenn ich Einnahme und Ausgabe in Verbindung denke? Was dann, wenn ich meinen Weg und Rückweg neben einander stelle und vergleiche? denn auch diese bleiben einzeln gedacht, ohne Verbindung mit einander, ohne Nebeneinanderstellung nicht als eine gewisse Anzahl Schritte oder Meilen, die nicht die geringste Beziehung auf einander haben.

§. 24.

Vorbereitung zum Begriff entgegengesetzter Zahlen.

Vermögen und Schuld soll uns dazu, zum einzelnen Falle dienen, und davon werden wir aufs Allgemeine schliessen können. — Lassen Sie uns den Fall setzen, ein Mann hat 8 Rthlr. Schuld, und weil er nach und nach 20 Rthlr. bei einzelnen Thalern einnimt, so will er die Schuld eben so abbezahlen, wie er diese Thaler bekommt; und nun wollen wir sehen, wie es nach und nach mit seinem Vermögen und Schulden stehet, denn dabei kommen also beide in Verbindung. Er hat jetzt

 o Rthlr.

0 Rthlr. Vermögen und 8 Rthlr. Schulden
darauf 7 Rthlr. Schulden
= 6 = =
= 5 = =
= 4 = =
= 3 = =
= 2 = =
= 1 = = und
darauf 0 = = oder Nichts;
darauf 1 Rthlr. Vermögen
= 2 = =
= 3 = =
= 4 = =
= 5 = =
= 6 = =
= 7 = =
= 8 = =
= 10 = =
= 11 = =
= 12 = =

Mich dünkt, jeder wird diese Uebersicht leicht von selbst verstehen, ohne daß ich davon noch ein Wort zu sagen brauche: nur Folgerungen wollen wir daraus herleiten.

§. 25.

Fortsetzung. Aufsuchung ihrer Eigenschaften.

Der Aufmerksame wird mit leichter Mühe folgendes bemerkt haben: 1) So lange als noch Schulden

hen da waren, wurde jeder einzelner Thaler des Vermögen von einen Thaler Schuld vernichtet, (wenn man auf das Vermögen sieht), so auch (sieht man besonders auf die Schulden) vernichtete jeder Thaler Vermögen immer 1 Thlr. der Schuld; und also: **die Einheit von dem einen machte die Einheit von dem andern zu o.** 2) Jede Anzahl Thaler vom Vermögen vernichtet eine gleiche Anzahl Thaler von der Schuld, und auch umgekehrt: jede Zahl Thaler Schuld vernichtet eine gleiche Anzahl Thaler Vermögen; und also: **zwei gleiche Zahlen, nemlich die eine von dem einen, und die andere von dem andern, werden in dieser Nebeneinanderstellung zu o.** Dies ist auch schon die nächste Folge aus Nr. 1. nähmlich daß die Einheit von dem einen die Einheit von dem andern zu Null mache; und ist diese wahr, so bietet sich die Wahrheit von jener zweiten von selbst dar. 3) Nachdem die 8 Rthlr. Schuld eben so viel Thaler vom Vermögen zu Nichts gemacht, und nun keine Schulden, welche das Vermögen vernichten können, mehr da sind so bleibt jeder Thaler Vermögen unvernichtet, und es entstehet zuletzt eine Summe Thaler Vermögen, welche dem Unterschiede gleich, wie viel Thaler Schuld weniger da sind, als Vermögen; denn 20 weniger 8 ist 12. — Gesetzt aber, es wären die 20 Rthlr. die Schuld, und die 8 Rthlr. das bei einzelnen Thalern einkommenden Vermögen, was würde dann folgen? — Ich hoffe, meine Leser werden mir die Mühe über-

 heben,

heben, diesen Fall auch so, wie den ersten vorstellich zu machen. Es würden, nachdem die 8 Rthlr. Vermögen, eben soviel Thaler Schulden vertilgt hätten, und nun kein Vermögen mehr da wäre, welches ferner Einen Thaler Schuld tilgen könnte, nach und nach die Schulden sich aufsummen, und am Ende 12 Thlr. Schulden, also eben soviel Thaler Schulden als vorhin Vermögen entstehen, folglich auch hier so wie dort 20 Rthlr. weniger 8 Rthlr., = 12 Rthlr. Diese 2 einander entgegengesetzte und nur möglich seyende Fälle (denn ein dritter Fall läßt sich gar nicht denken) bestätigen folgende Wahrheit. **Kommen zwei ungleiche Zahlen von der Beschaffenheit, wie Vermögen und Schulden in Verbindung, so hebt die Kleinere von der Größeren soviel auf, als sie groß ist, und von der Größern bleibt soviel übrig, als von der Kleinern nicht aufgehoben werden konnte; also, soviel diese kleiner ist, wie jene, oder soviel als nach der Subtraktion übrig bleibt.** Wieder eine Folgerung aus der ersten. 4) Um von Schulden zu Vermögen zu kommen, mußte also ein Zustand da seyn, worin nichts, so wenig etwas vom einen als andern ist; und eben so umgekehrt, von Vermögen zum Schulden zu kommen. Jede Einheit von Einen bringt die Summe von andern diesem Zustande worin alles 0 ist näher, und 0 stehet zwischen zwei gleich **große Zahlen von Vermögen zum Schulden,**

und

und umgekehrt, vom Schulden zum Vermögen in der Mitte. Ebenfalls eine Folgerung aus der ersten, wie jeden leicht auffallend seyn wird. — Alle übrigen drei lassen sich also auf die erste Folgerung zurückführen, alle aus der ersten herleiten. Ist jene wahr, so sind alle die übrigen eben so richtig, und wo sich Zahlen finden, die in Verbindung gedacht, die erste Folgerung zur Eigenschaft haben, haben zugleich alle die übrigen zu Eigenschaften, müssen so, wie Vermögen und Schulden von entgegengesetzter Art seyn.

§. 26.

Fortsetzung.

Einmahl umher gedacht in den Kreise Ihres Wissen, und, Leser! tausend einander entgegenstehende Handlungen und Umstände, werden Ihnen begegnen. Freilich machen diese nicht alle entgegengesetzte Zahlen; aber doch jedes Paar dieser Handlungen und jedes Paar dieser Umstände, die sich in Zahlen ausdrücken lassen, geben sie doch. Vorwärts- und Rückwärtsgehen, Bauen und Niedetreißen, Kaufen und Verkaufen, Baar Geld und Schulden haben, Eingießen und Abzapfen, eine Zeit vor- und eine nach Christi Geburt, Vermehren und Vermindern, nach Oben und nach Unten zu, Hitze und Kälte — alles dies sind entgegengesetzte Handlungen oder Umstände, und drücke ich sie in Zahlen aus, so sinds entgegengesetzte Zahlen. Habe ich 4 Schritt vorwärts und 4 Schritt rückwärts

gethan, so macht die gleiche Anzahl Schritte des einen Gehens die andern zu nichts, und also die Zahl meiner Schritte zu 0. Thäte ich einen Schritt weiter vor: oder rückwärts; so daß ich z. B. 5 vor: und 4 rückwärts gethan hätte; so würde dieser eine Schritt von einen entgegengesetzten nicht aufgehoben werden, und ich bleibe also in meinem Beispiele 1 Schritt vorwärts. — Habe ich 20 Fuß hoch gebauet, und reiße jezt 9 Fuß wieder nieder, so macht jeder der 9 Fuß, die ich niederreiße, einen der 20 die gebauet sind, zu nichts, und nach dem 9 davon zu nichts geworden, so werden 11 gebauet unvernichtet stehen bleiben. — Werden in ein Faß 40 Eimer eingegossen, und 30 abgezapft, so ist es völlig so gut, als ob diese leztern im Fasse nicht gewesen wären, denn das Abzapfen hob das Eingiessen wieder auf, und nur 10 Einer werden im Fasse bleiben. — 50 Jahr vor Christi Geburt und 50 Jahr nach Christi Geburt sind, zwei gleiche einander entgegengesetzte, von ihrer Mitte 0, worin Christus gebohren wurde, gleichweit abstehende Zeiten. Jedes Jahr wormit ich mich der Geburt Christi, also der entgegenstehenden Seite nähere, vermindert die Summe der Jahre vor Christi Geburt, und jedes Jahr, wormit ich von den Jahren nach Christi Geburt, bis zur Geburt zurück gehe, also jemehr ich mich 0 und der entgegengesetzten Seite nähere, macht von den 50 Jahren nach der Geburt eins zu nichts. — Wenn ich zu 0, Eins und abermals Eins, und so fort

8 Ein=

8 Einheiten hinzulege, so habe ich (zwar eigentlich blos gezählt, aber im weitesten Verstande auch) vermehrt. Wer wird, wenn ich die entstandene Menge, immer um Eins wieder vermindere, da zweifeln daß jede vermindernde Einheit, jede vorhin vermehrende Einheit zu o mache? Aber auch der Umstand — und Leser, merken Sie sichs! — der für uns so sehr wichtige Umstand, daß die Zahlen welche anzeigen, wie oft jede von zwei entgegengesetzten Handlungen geschehen ist, entgegengesetzte Zahlen sind, wird in diesem Exempel in seiner größten Deutlichkeit und Nützlichkeit dargestellt. Mit der Einheit ist 8 mahl vermehret und 8 mahl vermindert; jedes Mahl der Vermehrung, wird durch eins der Verminderung aufgehoben, und 8 mahl vermehren und 8 mahl vermindern ist völlig eben so gut als o mahl vermehren und o mahl vermindern, das ist, gar nichts verändern.

Setze ich 100 zur festgesetzten Summe, (Grundsumme könnte mans nennen) welches ich mit 5, und abermals 5, und sofort 10 mahl vermehre, und fange dann an sie mit 5 und abermals 5, und so fort 10 mahl zu vermindern, wird nicht allein jede vermehrende und jede vermindernde 5 sich, und also auch jede ihrer Einheit einzeln, zu o machen, sich aufheben, und also am Ende nichts als die Grundsumme 100 entstehen? und wird nicht auch 1 mahl vermehren von 1 mahl vermindern, aufgehoben? macht nicht auch die Zahl 10, welche die Verminderung anzeigt, die Zahl

10,

10, welche die Vermehrung anzeigt zu nichts oder 0, welches den Zustand bezeichnet, worin nichts verändert, kein mahl vermehrt, kein mahl vermindert ist? Umgekehrt, wenn man erst vermindert dann vermehrt, kann gar nichts anders erfolgen. — Wer die Maaßstäbe der Hitze und Kälte, die Thermometer kennt, wirds mit Händen greifen, daß jeder Grad Kälte einen Grad Hitze oder Wärme, und auch, jeder Grad Hitze einen Grad Kälte zu 0 mache. — Doch, ich glaube, dies sind genug Beispiele, die Wahrheit zu bestätigen: wenn entgegengesetzte Handlungen und Umstände sich in Zahlen ausdrücken lassen, und dadurch ins Gebiet der Arithmetik übergehen, so sind diese Zahlen auch entgegengesetzte Zahlen.

§. 27.

Fortsetzung. Eigentlicher Begriff.

Was sind also nun entgegengesetzte Zahlen? — Meine Leser werden im vorigen Paragraphen gelesen haben, daß sich von allen Beispielen dasjenige sagen läßt, was wir von den ersten, im vorlezten §., von den Vermögen und Schulden fanden; und Sie selbst mögen sich noch so viel andere Beispiele hinzudenken und untersuchen, Sie werden eben das erfahren. Allgemein wird jeder die Eigenschaft: daß Eins von der einen Zahl, Eins von der ihr entgegengesetzte vernichte, in Nichts verwandele, für die Haupteigenschaft entgegengesetzter Zahlen finden, und ich glaube der Begriff

griff bietet selbige in ihrem vollem Lichte von selbst dar. Alle Folgerungen, die man hieraus ziehen kann, sind auch Eigenschaften entgegengesetzter Zahlen. Daher kann ich sagen: eine Zahl von der einen Art, hebet eine von der entgegengesetzten gleich große auf; ist eine Zahl von beiden größer als die andere ihr entgegengesetzte, so entsteht eine Zahl, welche derjenigen gleich ist, wenn ich die kleinere von größern subtrahire; zwischen der einen Zahl und der ihr gleichgroßen entgegengesetzten, ist immer ein Nichts in der Mitte, nemlich ein Zustand, worin alle Zahlen der einen Art von der ihr entgegengesetzten ganz aufgehoben sind — alles dieses sind ebenfalls richtige Eigenschaften dieser Zahlen, aber nichts anders als Folgerungen von der ersten. Wenn nun die Eigenschaften einer Sache, diese Sache erklären, so sind entgegengesetzte Zahlen — **Zahlen, welche in Verbindung gedacht so beschaffen sind, daß die Einheit von der einen, von einer Einheit der andern vernichtet wird:** — zwei Zahlen, die also immer zwei einander entgegengesetzte Handlungen oder Umstände ausdrücken.

§. 28.
Nöthige Zusätze zum vorigen.

Aber man merke ja auf die Worte: **in Verbindung gedacht.** Denn ehe ich meine Handlung mit keiner andern vergleiche, ehe ich einen Umstand oder Zustand keinen entgegen stelle, welche das gerade Gegen-

gen-

gentheil vom ersten ist, so ist Handlung und Umstand absolute Handlung und Umstand. Und eben so mit den Zahlen, womit Werth oder Größe dieser Handlung oder Umstand ausgedrückt wird: **jede ist für sich eine würkliche Zahl, die ihren eigenthümlichen Werth hat.** 100 Rthlr. Schulden, ist eine würkliche Zahl die als Schulden ihren Werth hat, eben so ihren Werth hat, wie 100 Rthlr. Vermögen, als Vermögen. 10 Meilen Rückweg sind eben so gut würkliche 10 Meilen, als 10 Meilen vorwärts gegangen. Nur dann erst, wenn ich im ersten Beispiele frage: was entsteht, wenn die 100 Rthlr. Schulden mit den 100 Rthlr. Vermögen zusammen kommen? wenn ich nach der Gütermasse (Massa bonorum) eines Mannes frage, wovon jene 100 Rthlr. Schulden und 100 Rthlr. Vermögen, seinen Güterzustand bezeichnen, dann erst kommen diese Zahlen zusammen, kommen in solche Verbindung, worin sie sich wechselseitig aufheben. Die 100 Rthlr. Schulden werden von den 100 Rthlr. Vermögen getilgt, folglich aufgehoben, so wie man auch mit eben den Recht sagen, die Schulden verzehrten das Vermögen, verwandelten es in nichts, die Massa bonorum des Mannes wäre also eine große 0. Wäre das Vermögen aber 200 Rthlr. so würden die Schulden 100 Rthlr. davon zu ihrer Tilgung vernichtet, und noch 100 Rthlr. reines Vermögen bleiben.

§. 29.

§. 29.

Namen und Zeichen entgegengesetzter Zahlen.

Man würde nicht im Stande seyn diese Zahlen von nichtentgegengesetzten zu unterscheiden, wenn es nicht durch Zeichen geschähe, und eine gleiche Absicht erfordert auch für jede einen besondern Namen. — Man nennt eine von diesen Zahlen, welche man will. **positiv** oder **bejahend**, und die ihr entgegengesetzte **negativ** oder **verneinend**. Nenne ich Vermögen positiv, so sind Schulden, als diesem entgegengesetzt, negativ; nenne ich aber die Schulden positiv, so muß das Vermögen negativ heißen. Es ist ganz willkührlich, welche ich bejahen will. Schulden sind verneinendes Vermögen, und Vermögen verneinende Schulden. Setze ich also fest: diese soll die positive Zahl seyn, so setze ich dadurch zugleich fest, welche die nagative Zahl seyn soll, nemlich die der ersten entgegengesetzte. Dasjenige, was man ohne Beziehung auf das Gegentheil denkt, nimmt man, wenn eine solche Beziehung hernach statt findet, insgemein für positiv an, ohngeachtet man es für negativ halten könnte, der Rechnung ohnbeschadet. — Das Zeichen der positiven ist das gewöhnliche Additionszeichen, welche man aber nur da vor die Zahl zu setzen pflegt, wo es zweifelhaft seyn könnte, ob dieselbe positiv sey, das Zeichen der negativen konnte nun nicht gut ein anderes seyn, als das, den Additionszeichen entgegenstehende, das Subtractionzeichen. + bezeichnet also das Positive

und — das Negative. Bezeichne ich also 100 Jahr nach Christi Geburt, indem auch Jahre vor Christi Geburt in Betracht kommen, so kann ich dafür + 100 oder — 100 Jahr setzen, je nachdem ich diese Jahre positiv oder negativ setzen will; nur bloß dann muß ich im ersten Falle z. B. — 50, und im andern + 50 Jahr als Jahre vor Christi Geburt bezeichnen. Aus Allem den Vorhergehenden wird man nun auch von selbst schliessen können: daß da wo keine Zahl entgegengesetzter Art in Betracht kommt, Benennug und Bezeichung mit dem Begriff selbst wegfällt. Habe ichs bloß mit Schulden zu thun, so sind alle Schulden positiv, absolut wirklich in ihren Werth, und zähle ich bloß die Jahr vor Christi Geburt zusammen, so sind auch diese positiv, weil sie würklich sind.

§. 30.

Addition entgegengesezter Zahlen.

Nun, Leser, mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, wollen wir denn auch mit entgegengesetzten Zahlen zu rechnen versuchen. Es wird dieß Ihnen nicht schwer seyn, wenn Sie zugleich richtige Kenntnisse der vier Rechnungsarten mitbringen. Kurz will ich jede Rechnungsart vorher erklären, und Sie genau mit den Begriffen, die ich voraussetze, wenigstens mit einem Winke bekannt machen.

Also dann erst zur Addition. Addiren heißt eigentlich, zwei oder mehrere Zahlen so verbinden, daß

eine

eine Zahl entstehe, welche den verbundenen Zahlen gleich sey. — Wenn Sie lauter Vermögen oder lauter Schulden addiren, so entsteht eine Summe, welches im ersten Falle nichts als Vermögen, im andern nichts als Schulden ist: und wenn wir nun Vermögen mit + und Schulden mit — bezeichnen, wird dann also nicht die Summe vom ersten auch + und vom andern auch — seyn? **Wenn also die Zahlen die addirt werden sollen einerlei Zeichen haben, + oder —, so bekommt die Summe dasselbe:** mehr mag ich über diese handgreifliche Sache nicht sagen. — Was entsteht aber, wenn + 4 und — 3 addirt werden soll? das heißt also, welcher Zahl ist + 4 und — 3 vereiniget gleich? die Zahl + 1 ist so groß, als + 4 und — 3 zusammengenommen; denn die — 3 als das entgegensetzte von + 4 hebt davon + 3 auf, und dann bleibt nicht mehr als + 1 von den + 4 übrig. Eben so würde die Summe von — 6 und + 4, — 2 seyn, weil + 4 von — 6 soviel als sie groß ist, vernichtet, und alsdenn davon — 2 übrig bleibt; — 2 ist also so groß als — 6 und + 4 zusammengenommen. Denn wenn Jemand Sie fragte: was hat der, welcher 6 Rthlr. Schulden und 4 Rthlr. Vermögen hat, würden Sie nicht antworten: 2 Rthlr. Schulden? und diese 2 Rthlr. Schulden wäre also die Zahl, welcher den 6 Rthlr. Schulden und 4 Rthlr. Vermögen zusammengenommen gleich ist. Also **die Summe zweier entgegengesetzten Zahlen, das**

 ist,

ist, die Zahl, welche den entgegengesetzten Zahlen zusammengenommen gleich ist, **findet man, wenn man die kleinere von der größern subtrahirt, und dem Reste das Zeichen der größern giebt.** Wie man die Summe von mehreren positiven und negativen Zahlen finde, glaube ich, wird jeder meiner Leser nun von selbst finden. Was würde der haben, welcher 100 Rthlr. baar Geld und 200 Rthlr. in ausgeliehenen Kapitalien in Vermögen, aber auch 50 Rthlr. und noch 70 Rthlr. Schulden hat? Ohne Zweifel soviel, als übrig bleibt, wenn er von den 300 Rthlr. (die Summe von 100 Rthlr. und 200 Rthlr.) Vermögen die 120 Rthlr. (die Summe von 50 Rthlr. und 70 Rthlr.) Schulden bezahlte, also 180 Rthlr. Vermögen. Wäre der Fall umgekehrt, wären die 100 Rthlr. und 200 Rthlr. Schulden, die 50 Rthlr. und 70 Rthlr. Vermögen, so würde er soviel haben, als übrig bleibt, wenn er von den 120 Rthlr. Vermögen die 300 Rthlr. Schulden bezahlte, nemlich 180 Rthlr. Schulden. Würde also die Summe von + 40 — 50 Rthlr. und + 70 Rthlr. und — 20 Rthlr. verlangt, so würde das leichteste Mittel seyn, die Summe zu erhalten: wenn man die positiven, und auch die negativen Zahlen, jede in ein verwandle, um dadurch zwei Zahlen, eine positive und eine negative zu erhalten, welche sich dann in der Vereinigung ganz oder zum Theil aufheben. Also + 40 und + 70 ist + 110; und — 50 und — 20 ist — 70, folglich sind nun bloß die beiden ent-

entgegengesetzten Zahlen + 110 und — 70 zu vereinigen, welche, nachdem 70 von 110 subtrahirt ist, + 40 zur Summe giebt. Eben so ist es, wenn + 20 Rthlr. und — 70 Rthlr. und — 50 Rthlr. und + 30 Rthlr. und + 40 Rthlr. addirt werden soll. Dann ist + 20 und + 30 und + 40 zusammen + 90; und ferner — 70 und — 50 zusammen — 120, also alle jene Zahlen in die beiden entgegengesetzten + 90 und — 120 verwandelt, welche vereinigt — 30 geben; weil 120 weniger 90, 30, und diese also, da 120 die größere negativ; das ist — 30.

Ich hoffe, keiner meiner Leser wird bei dem Anblicke einer solchen Zahlen wie — 30 sich fragen: was ist denn — 30? nicht eben so gut 30 als + 30?; denn den richtigen Begriff muß ich hier ganz voraussetzen dürfen: und dennoch weiß ich nicht, welche Ahndung mir auf den Gedanken bringt, einige von Ihnen, mögten diese Frage doch wohl thun. Doch ist besser, sie gethan, und sich zu beantworten gesucht, als sorglos Nichts dabei gedacht. Meine Ahndung zwingt mich hier noch die Wiederholung zu machen: — 30, ist eben so gut 30 als + 30 nur mit dem wohl zu merkenden Unterschiede: — 30 ist das gerade Gegentheil von + 30, so wie auch + 30 eben das von — 30 ist. — Nun will ich diesem Allen noch ein Paar Beispiele anhängen, die Sie nun leicht enträthseln werden. Man soll addiren: + 30,789 und + 9,37 und —

 37,3497.

37,3497. Man soll addiren — 139,30007 und — 637,3 und + 789,003 und + 14,37 und — 73. Hier sind die Auflösungen, ohne übrigens ein Wort darüber zu sagen.

Das erste.		Das andere.	
	+ 30,789		— 139,30007
	+ 9,37		— 637,3
	— 37,3497		+ 789,003
Summe	+ 2,8093.		+ 14,37
			— 73,
		Summe	— 47,22707

§. 31.

Subtraktion entgegengesetzter Zahlen: besonders wenn der Subtrahendus größer als der Minuendus ist, und beide entweder positiv oder negativ sind.

Subtrahiren heißt: eine Zahl suchen, welche den Unterschied zwischen dem Subtrahendus und Minuendus anzeiget; also eine Zahl, welche, wenn sie mit dem Subtrahendus vereiniget wird, dem Minuendus gleich sey. Der Unterschied von + 12 und + 5 muß + 7 seyn, weil + 7 und + 5 zusammen + 12 gleich ist. Und eben so, der Unterschied zwischen — 16 und — 10 ist — 6, weil — 10 und — 6 zusammen genommen — 16 ausmacht. Wenn also der Minuendus und der Subtrahendus einerlei Zeichen haben, das ist, wenn sie beide von einerlei Art entgegensetzter Zahlen sind, dann hat der Rest, welcher ganz auf gewöhnliche

liche Weise gefunden wird, eben das Zeichen. Doch ist dieses nur so lange wahr, bis der Subtrahendus nicht größer als der Minuendus ist. Wenn er's aber ist, wie soll man dann den Rest finden? und von welcher Art wird er seyn? Die Beantwortung dieser Frage habe ich schon aus den Dezimalbrüchen bis hier aufgespart, und die Leser welche sie dort vermißt haben, werden mich nun gewiß entschuldigen. Soll von + 20, + 30 subtrahirt werden, so heißt das: es soll eine Zahl gesucht werden, die mit 30 vereiniget, 20 macht. Und welches ist die? Ich glaube, jeder wird die Unmöglichkeit leicht einsehen, daß diese Zahl nicht eben so wie 30 positiv seyn könne; denn würde der, kleinste Theil oder Bruch einer auch 30 nichtentgegengesetzten Einheit, mit 30 zusammengenommen, mit ihr zu einer Zahl vereinet: so würde immer noch eine größere Zahl, wie 30, entstehen: da doch 30 sich vermindern muß, um 20 gleich zu werden. Der Unterschied muß also nothwendig der 30 entgegengesetzt seyn, um durch die Vereinigung soviel zu vermindern, daß 20 entsteht. Aus 30 entsteht aber nicht anders 20, als wenn von 30 soviel vernichtet, soviel subtrahirt wird, als übrig bleibt, wenn man 20 von 30 subtrahirt. Dann bleibt 10, und diese 10 muß negativ, den Minuendus und Subtrahendus entgegengesetzt seyn, weil + 30 und — 10, nach vorigen Paragraph + 20 giebt. Also — 10 ist der Unterschied zwischen 30 und 20; und dieser wird gefunden, wenn der Minuendus, als

die kleinere Zahl, vom Subtrahendus subtrahirt wird. Doch vielleicht bin ich durch ein sinnlichers Beispiel deutlicher. Wenn Sie 100 Rthlr. in Vermögen haben, und nun festsetzten 150 Rthlr. und also eine größere Zahl des Vermögens, zu verschenken, was würde Ihnen dann noch übrig bleiben? Nichts. Sie würden 50 Rthlr. Schulden machen, also Sich in einem, dem Vermögen entgegenstehenden Zustand versetzen. — Es kann aber Minuendus und Subtrahendus nicht allein positiv, sondern auch negativ, und der letztere größer seyn, als der erstere: und auch diesen Fall wollen wir betrachten. Von — 24 soll — 36 subtrahirt werden, das ist: es soll eine Zahl gefunden werden, welche, mit — 36, vereinigt — 24 macht. Hier ist dieselbe Nothwendigkeit, wie beim vorigen Falle, daß dieß eine Zahl seyn müsse, welche — 36 vermindere, um — 24 zu werden. Jede, noch so kleine negative, — 36 also nicht entgegenstehende Zahl, wird mit — 36 immer eine größere, nie eine kleinere Zahl geben, und daher muß auch diese Zahl — 36 entgegengesetzt, also, positiv seyn; muß von — 36 so viel aufheben, daß daraus — 24 entsteht. Dieß kann nur + 12 seyn, weil — 36 und + 12, nach der Vereinigung der Summe — 24 giebt: + 12 hebt nemlich von — 36 — 12 auf, und dann bleibt — 24. Diese + 12 findet man aber, wenn man den Minuendus — 24 vom Subtrahendus — 36 subtrahiret, und dem Reste 12 das positive Zeichen giebt. Es ist dieß eben so, als

wenn

wenn jemand 100 Rthlr. Schulden hätte, ein anderer ihm, um diese Schulden zu tilgen, folglich wegzunehmen 150 Rthlr. gebe, würde dann nicht ersterer, wenn er seine Schulden bezahlet hätte, noch 50 Rthlr. würkliches Vermögen behalten? — Wir werden nun im Stande seyn, hieraus uns eine Regel herzuleiten für **den Fall, wenn bei gleichen Zeichen der Zahlen der Subtrahendus größer als der Minuendus ist**: nemlich, **Man subtrahirt dann den kleinern Minuendus von dem Subtrahendus, und giebt dem Reste das entgegengesetzte Zeichen.** Es wird hiernach gar nicht schwer seyn folgende Subtraktionsbeispiele zu verstehen.

von 1367	von 297,34	von 3,2645
2.078 subt.	47.3,9.03 subt.	5,67.03
bleibt — 711	bleibt — 216,563	bleibt — 2,4058

In diesen Beispielen haben zwar Minuendus und Subtrahendus gar kein Zeichen, weil dabei kein Gegentheil gedacht wurde; und dann sind sie immer positiv (§. 29). Eben das entstehet, wenn vor den Minuendus und Subtrahendus das Zeichen des Positiven gesetzt, und dadurch Rücksicht auf das Gegentheil genommen wird. Würde Minuendus und Subtrahendus negativ seyn, z. B.

Von — 3,2645
— 5,6703 subtrahirt

bleibt + 2,4058.

so würde der Unterschied positiv werden.

§. 32.

Eine wichtige Anmerkungen bei Dezimalen.

Davon, wenn im vorigen Falle Minuendus und Subtrahendus Dezimalen sind, muß ich noch ein Paar Worte sagen. Wir wollen das vorige Beispiel noch einmal betrachten. Was würde kommen, wenn man die Ziefern des Subtrahendus von den des Minuendus in jeder Ordnung subtrahirte?

3,2.645
5,6703.

Es würde 5942 würklich von den niedrigen Ordnungen übrig bleiben, aber die 5 Einer lassen sich nicht von den 2 Einern (wozu die 3 durchs Borgen gekommen ist) subtrahiren. Daß dieser auf gewöhnliche Art gefundene Rest nicht entgegengesetzt seyn kann, wird jeder leicht einsehen, und wenn 5, von 2 subtrahiret werden soll, dann der, nach vorigen §. gefundene Unterschied, — 3, folglich dem Subtrahendus und Minuendus entgegengesetzt sey, folgt aus den vorhin gesagten Gründen. Auf solche Art entstehet aus obigem Beispiele ein Unterschied, welcher — 3 ✢ 0,5942 ausmacht. Man hat den Minuendus und Subtrahendus gleichsam in 2 Theile zerlegt; den

Minuendus 3,2645 in 2 ✢ 1,2645, und den
Subtrahendus 5,6703 in 5 ✢ . 6703.

und so entstand auch — 3 ✢ 0,5942 ein, in einem verneinenden und bejahenden Theil, getheilter Unterschied.

schied. — Der Schluß ist leicht, dieser Rest muß dem vorigen — 2,4058, im vorigen §., gleich seyn; und daß ist er auch. Nehmen wir — 3 und + 0,5942 nach den Regeln der Addition (§. 30, 17, 15.) zusammen, so entstehet

— 3
+ 0,5942 die Summe

— 2,4058; also der Unterschied aus vorigen §., der nicht getheilt war.

Würklich pflegt man nun so zu subtrahiren, wie wir eben gesehen haben, aber nicht im Unterschied das + Zeichen zu setzen, sondern statt — 3 + 0,5942 setzt man nur — 3,5942, und merkt sich dabei, das die Ziefern hinter den Komma positiv sind. Noch besser aber setzt man die negativen Ziefern vor das Comma, mit dem Zeichen hinter die positiven, nemlich statt — 3 + 0,5942 besser 0,5942 — 3, wo dann die Ziefern ohne Zeichen immer das Positive anzeigen müssen; und dadurch entgehet man aller Furcht vor Verwechselung der Begriffe von — 3,5942 welches — 3 + 5942 bedeuten soll, und — 3,5942 welches 3,5942 ganz verneinend anzeigen soll.

Nun glaube ich werden folgende Beispiele leicht zu enträthseln seyn.

Von 46,046
120,78 subtrah.

bleibt 0,266 — 75 oder 25,266 — 100.

Von

Von 1,3.01.029995.66398
1,32221919473391 subtrahiret

0,9788108008 3007 — 1.

§. 33.
Subtraktion würklich entgegengesetzter Zahlen.

Nun ist noch übrig entgegengesetzte Zahlen zu subtrahiren; und dabei können 4 Fälle vorkommen: der Minuendus kann entweder positiv oder negativ, und dann der Subtrahendus negativ oder positiv, und wenn eins von beiden ist, so kann der Subtrahendus entweder größer oder kleiner seyn, als der Minuendus. Folgende 4 Beispiele werden sie deutlich vorstellen, welche denn auch zu unserer Erläuterung gebraucht werden sollen. Es kann seyn

der Minuendus	+ 24,	+ 16,	— 24,	— 16
der Subtrahendus	— 16,	— 24,	+ 16,	+ 24.

Zu jedes dieser Beispiele müssen wir nun den Unterschied suchen, das ist, die Zahl suchen, welche, wenn sie mit dem Subtrahendus vereiniget wird, den Minuendus ausmacht.

Der erste Fall. Die Zahl welche mit — 16 vereinigt + 24 ausmacht, muß 1) positiv und 2) so groß seyn, daß, wenn 16 davon subtrahiret wird, + 24 übrig bleibt, (§. 30.) weil wenn — 16 damit vereinigt wird, durch diese Vereinigung, von dieser

Zahl 16 positive Einheiten vernichtet werden, und dann noch + 24 Einheiten übrig bleiben müssen. Die Zahl muß folglich + 16 und + 24 zusammen genommen, also + 40, die Summe von den Minuendus und Subtrahendus ohne auf die Zeichen zu sehen, seyn. Der Unterschied wird also in diesem ersten Falle gefunden, wenn man die Zahlen des Minuendus und Subtrahendus, ohne darauf zu sehen, daß sie entgegengesetzter Art sind, addirt, und die Summe mit dem Zeichen des Minuendus bezeichnet.

Der zweite Fall. Auch hier muß der Unterschied 1) positiv und 2) so groß seyn, daß, wenn derselbe mit — 24 vereiniget wird, und durch diese Vereinigung 24 positive Einheiten vernichtet werden, dann noch + 16 übrig bleiben und also zur Summe geben. Kann diese eine andere seyn, als ebenfalls 40? ebenfalls die Summe des Minuendus und Subtrahendus, wenn beide als absolut betrachtet werden? — Und daß in diesen beiden Fällen der Unterschied positiv seyn müsse, kann man auch daraus beweisen, wenn man setzte, er sollte negativ seyn, und untersuchte, was daraus folgte. Wäre er — 40, so müßte — 16 und — 40 vereinigt + 24 geben; und wie kann es das? — Es verhält sich in diesen beiden Fällen, als mit zwei, die sich in entgegengesetzten Vermögensumständen befinden: da der eine 24 Rthlr. würklich in Vermögen der andere aber 16 Rthlr. Schulden hat, und man nun die Frage beantwortet: wie groß der Unterschied

schied zwischen beiden sey? Er muß 40 Rthlr. Vermögen seyn; denn wenn der Letztere diese bekommt, so wird er, wenn seine Schulden bezahlt sind, erst so viel wie der Erste haben. In beiden Fällen, wo der Subtrahendus negativ, der Minuendus positiv war, wird der Unterschied gefunden, wenn man die Zahlen von beiden, ohne darauf zu sehen, daß sie entgegengesetzt sind, addirt, und der Summe das Zeichen des Minuendus giebt.

Der dritte Fall. In diesem Falle wird der Unterschied zwischen + 16 und — 24 gesucht. Der Unterschied und + 16 in eine Zahl vereinigt, muß also — 24 machen; er muß daher 1) negativ und 2) so groß seyn, daß, wenn durch die Vereinigung + 16 davon 16 negative Einheiten vernichtet, dann noch — 24 bleibe; er muß also der Größe nach die Summe von 16 und 24 = 40, die Summe des Minuendus Subtrahendus seyn. — 40 und + 16 machen in Summe = — 24, den Minuendus.

Der vierte Fall, worin jener umgekehrt ist. Der Unterschied von + 24 und — 16, muß ebenfals 1, negativ und 2, so groß seyn, daß wenn er mit + 24 vereinigt, nach der, durch die Vereinigung geschehene Vernichtung, davon noch — 16 zur Summe bleibe. Es kann also auch hier keine andere Zahl seyn, als die Summe des Minuendus und Subtrahendus, um wenn + 24 davon 24 negative Einheiten zu Nichts macht, dann noch — 16 übrig bleibe. Derjenige der

24 Rthlr. in Vermögen hat muß gewiß erst 40 Rthlr. Schulden machen, ehe er soviel Schuld hat, als ein anderer, der 16 Rthlr. Schuld hat; und der Vermögenszustand des ersten ist also um 40 Rthlr. Schulden, von dem, des leztern unterschieden. Meine Leser sehen auch in diesen beiden Fällen wird der Unterschied gefunden, wenn man den Minuendus und Subtrahendus addiret, und die Summe, nach den Minuendus negativ sezt; Sie sehen, wenn Sie alle Fälle vergleichen, daß man in allen folgende leichte **Regel bei der Subtraktion entgegengesetzter Zahlen** nur zu beobachten habe: **Man addirt die Zahlen des Subtrahendus und Minuendus zusammen, und giebt der Summe das Zeichen des Minuendus, so ist dieselbe der Unterschied.**

§. 34.
Eine Zahl von o zu subtrahiren.

Es ist noch eine Kleinigkeit übrig, welche wir betrachten müssen, damit sie nicht in der Folge zur Schwierigkeit werde. Es ist weiter nichts, als die Beantwortung der Frage: was kommt, wenn eine positive oder eine negative Zahl von Nichts oder o subtrahiret werden soll? Was ist der Unterschied zwischen + 5 und o, oder zwischen — 5 und o? Der Unterschied muß diejenige Zahl seyn, welche mit + 5 oder mit — 5 vereiniget o giebt. Keine Zahl leistet diese Bedingung als wenn mit + 5, — 5 vereinigt, und

mit

mit — 5, + 5 vereinigt, also wenn zu dem Subtrahendus sein Entgegengesetztes addirt wird; und daher muß der Unterschied

Von 0		von 0
+ 5 subtrahirt	und	— 5 subtrahirt
— 5		+ 5

seyn. Denn + 5 und — 5, giebt addirt, so wie — 5 und + 5, einerlei, nemlich 0. **Soll also eine würkliche Zahl von 0 subtrahirt werden, so ist der Unterschied, das Entgegengesetzte der Zahl.** Nun wird der Unterschied 3,789798 und 1, nicht schwer zu finden seyn.

Von 1,
3,789798 subtr.

bleibt nach §. 32. 0,210202 — 3. oder nach §. 31. — 2,789798.

§. 35.
Multiplikation entgegengesetzter Zahlen.

Multipliziren heißt: eine Zahl finden, welche so groß ist, als der Multiplikandus so vielmahl genommen als der Multiplikator anzeigt. Ist Multiplikandus und Multiplikator absolut, das ist, werden die Zahlen ohne Rücksicht auf ihr Entgegengesetzte betrachtet, so heißt es, man soll den Multiplikandus soviel absolut nehmen, als der Multiplikator anzeigt. 4 mahl

6 heißt 6, 4 mahl nehmen, und 24 ist absolut, wie 4 und 6 es ist. Nun können aber, wenn man in entgegengesetzten Zahlen rechnet, folgende 4 Fälle statt finden. 1, beide, der Multiplikator und Multiplikandus, können positive Zahlen haben; 2, der Multiplikandus positiv und der Multiplitator ihm entgegengesetzt, das ist, negativ seyn; 3, oder umgekehrt, der Multiplikandus negativ und der Multiplikator positiv; 4, und auch kann die Zahl von beiden negativ, das ist, den gleichen positiven, entgegengesetzt seyn. Wenn 6 die Zahl der Multiplikandus und 4 die Zahl des Multiplikators seyn soll, so wären diese 4 Fälle in diesem Beispiele folgende:

der Multiplikandus + 6 ; + 6 ; — 6 ; — 6.
der Multiplikator + 4 ; — 4 ; + 4 ; — 4.

Wir wollen jeden Fall einzeln betrachten.

Der erste Fall. + 6 soll + 4 mahl genommen, heißt augenscheinlich so viel: + 6 soll würklich 4 mahl genommen, und nicht das Entgegengesetzte davon, das ist, nicht — 6 soll genommen werden. Und wer wird also nicht zum Produkte + 24 bekommen? **Also zwei positive Zahlen multiplizirt geben ein positives Produkt.**

Der zweite Fall. Soll + 6, — 4 mahl genommen werden, so zeigt — 4 an, daß man das Entgegengesetzte von + 6 nehmen solle, und daß man dies 4 mahl nehmen solle. Das Entgegengesetzte von

$+ 6$ ist aber $- 6$, und dies 4 mahl ist $- 24$. So deutlich dieses, in Rücksicht auf das, was von entgegengesetzten Zahlen besonders im 27ten §. davon gesagt, auch ist, so ist dennoch nicht eine Vorstellungsart allen deutlich. Es könnten einigen Lesern Zweifel übrig bleiben, daß das Produkt in diesem Falle negativ sey; und weil ich dieß ungern sehe, so will sich noch einen andern, von jenen ganz abweichenden Beweis geben, um die Wahrheit zu bestätigen: **Ein positiver Multiplikandus und negativer Multiplikator geben ein negatives Produkt.** $+ 6$ mahl $- 4$ kann nur eines von beiden geben, entweder $+ 24$ oder das Entgegengesetzte davon, $- 24$. Die Frage ist: welchem wird das Loos treffen? So lange wir es nicht wissen, wollen wir diese Ungewißheit mit $\pm$ bezeichnet; das heißt es kann beides, positiv oder negativ seyn. Daß $+ 4 - 4 = 0$, und daß $+ 6 \times 0$ auch $= 0$ ist: wer weiß das nicht? und daß daher $+ 6 \times (+ 4 - 4) = 0$ ist, wird jeder beim ersten Anblicke daraus folgern. Wird $+ 4 - 4$ würklich mit $+ 6$ multipliziret, so wissen wir, daß $+ 4 \times + 6$, $+ 24$ giebt, ob aber $- 4 \times + 6$, $+ 24$ oder $- 24$ giebt, daß wissen wir noch nicht, und bezeichnen es daher mit ± 24; also ist $+ 6 \times + 4 - 4 = + 24 \pm 24$; wir wissen aber, daß $+ 6 \times + 4 - 4, = 0$ war, also muß $+ 24 \pm 24$ auch $= 0$ seyn. In welchem Falle kann dieses aber möglich seyn, wenn ± 24, $+ 24$ oder $- 24$ ist? — Ist es $+ 24$, so ist $+ 24 \pm 24$, soviel als $+ 24$

$+ 24$;

$+24$; dies kann aber nie 0 werden. Nehmen wir aber -24 dafür, so ist $+24 - 24 = 0$, wie wir aus dem Begriffe entgegengesetzter Zahlen wissen. Also ± 24 kann nur -24 seyn: ± 24 bezeichnete aber das Produkt von $+6 \times -4$; daher kann das Produkt eines positiven Multiplikandus und negativen Multiplikators nichts anders ein negatives Produkt geben. Dieß wird Statt finden, man mag für $+6$ und -4 für Zahlen nehmen, welche man will.

Der dritte Fall. In diesem Fall soll -6 mit $+4$ multipliziret werden. $+4$ zeigt an, daß man -6 würklich 4 mahl nehmen solle; nimt man -6, 4 mahl: was kann anders daraus entstehen als -24; denn kann das Vielfache wohl anderer Art seyn, als das Einfache? Und da es gleichviel ist, ob man 6×4 oder 4×6 habe, das ist: da es gleichgütig ist, wie man die Faktoren verwechselt, so muß auch $-6 \times +4$ mit $-4 \times +6$ einerlei Produkt geben. $-4 \times +6$ gab aber -24; also muß $-6 \times +4$ auch -24 geben. Es ist also wahr: **das Produkt eines negativen Multiplikandus und positiven Multiplikators ist negativ.**

Der vierte Fall. Hier sind beide Faktors negativ; -6×-4, was mag das geben? $+6 \times -4$ gab -24, $-6 \times +4$ gab -24, also, wenn entweder Multiplikandus oder Multiplikator negativ ist, so ist das Produkt negativ; dies sind aber die zwei

 mög-

möglichen Versetzungen der Zeichen, und diese geben im Produkt (—) so kann $- \times -$ nicht auch (—) geben und dann muß es $+$ geben. Daß es würklich so sey, können wird daraus erkennen: in -6×-4 zeigt der Multiplikator an, daß von -6 das Entgegengesetzte, und dieses 4 mahl genommen werden solle. Das Entgegengesetzte von -6 ist aber $+6$, und $+6$, 4 mahl, ist $+24$; also -6×-4 ist $+24$. Es ist folglich **Produkt eines negativen Multiplikandus und Multiplikators, positiv.** — Zur Bestätigung dieses Satzes will ich einen ähnlichen Beweis, wie beim 2ten Falle beifügen: ich werde mich nun dabei kürzer fassen können. Ungewiß ob -6×-4 $+$ oder -24 wird, wollen wir es ± 24 bezeigen. $+4-4$ ist 0, und also $-6 \times +4-4$ auch $= 0$. $-6 \times +4$ ist aber nach dem 3ten Falle -24 und was -6×-4 giebt, wissen wir nicht, bezeichnen es so lange mit ± 24; also $-6 \times +4-4$ ist -24 ± 24 aber auch 0, also ist $-24 \pm 24 = 0$. Dies kann nicht anders möglich seyn, als wenn ± 24, $+24$ ist, weil $-24+24$ zusammen 0 macht; wäre es -24, so würde $-24-24$ vereiniget nie 0 werden.

§. 36.

Fortsetzung.

Wir wollen die gehabten Fälle zur Vergleichung neben einander setzen. Es war

der

der Multiplikandus	+ 6,	+ 6,	— 6,	— 6
der Multiplikator	+ 4,	— 4,	+ 4,	— 4
das Produkt	+ 24;	— 24;	— 24;	+ 24.

Eine geringe Aufmerksamkeit zeigt es uns, daß zwei positive und zwei negative Produkte aus den 4 möglichen Fällen entstehen; daß die positiven da entstehen, wo entweder beides Multiplikandus und Multiplikator positiv oder negativ ist; und weil nun dieses mit den Zeichen bezeichnet ist, so sehen wir da positive Produkte wo gleiche Zeichen bei Multiplikandus und Multiplikator sind; negative Produkte sehen wir aber, wo der Multiplikandus und Multiplikator entgegengesetzt; also wo verschiedene Zeichen sind. Alles dieses pflegt man nun in folgende kurze praktische Regel zusammen zu nehmen: **Gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche ein negatives Produkt.** Diese Regel hat man nur zu merken, um in entgegengesetzten Zahlen multipliziren zu können: und wie leicht ist die! Ich überlasse daher meinen Lesern ganz die folgende Beispiele, ohne ein Wort weiter darüber zu sagen.

+ 4, 6 mit
+ 0, 3 multipl.
+ 1, 38 Prod.

— 13,03 mit
— 6,3 multipl.
3909
7818
+ 82,089 Produkt

— 263567 mit
+ 4 multpl.
— 10,54268 Prod.

0,6782 — 5 mit
+ 8 multpl.
5,4256 — 40

§. 37.

Division entgegengesetzter Zahlen.

Dividiren heißt: eine Zahl (Quotienten) finden, welche anzeigt, wie oft der Divisor in den Dividendus vorhanden oder enthalten ist. Wenn man also den Divisor so vielmahl nimmt, als der Quotient anzeigt, so muß der Dividendus herauskommen. — Nun sind hier, so wie bei der Multiplikation 4 Fälle: Es kann der Dividendus und Divisor beide positiv, oder der Dividendus und Divisor beide negativ seyn, oder auch entweder, der Dividendus positiv und der Divisor negativ, oder umgekehrt, der Dividendus negativ, und der Divisor positiv. Es sey 32 die Zahl des Dividendus und 4 die Zahl des Divisors, so kann seyn

$+ 32, - 32, + 32, - 32$, der Divident.
$+ 4, - 4, - 4, + 4$, der Divisor.

Der erste Fall. Darin will man wissen, wie vielmahl $+ 4$ in $+ 32$; wie oft eine positive in andere positive Zahl enthalten sey. Es wird jeden begreiflich seyn, daß $+ 4$ in $+ 32$ würklich etliche, (nemlich 8) mahl enthalten ist, und diese 8 kann also nicht negativ, oder den Positiven entgegengesetzt, sie muß positiv seyn; folglich $+ 8$ ist der Quotient. Denn auch der positive Divisor kann nur positive mahl genommen werden, um das der positive Dividendus herauskommt, wie wir aus dem ersten Falle der Multiplikation wissen.

Der zweite Fall fordert die Beantwortung der Frage: wie oft eine negative Zahl in eine andere negas

gative enthalten? — 4 läßt sich von — 32, würklich 8 mahl wegnehmen, — 4 ist also in — 32 würklich + 8 enthalten, nicht das Entgegengesetzte von + 4; und — 4, wieder + 8 mahl genommen, giebt nur allein — 32 wieder. **Also eine negative Zahl durch eine negative dividirt, giebt einen negativen Quotienten.**

Der dritte Fall. Man fragt: wie oft + 4 in — 32 enthalten? Sollte aber wohl + 4 in die entgegengesetzten — 32 enthalten seyn können? positiv etlichemahl nicht, aber das Entgegengesetzte von + 4, das ist — 4 ist würklich + 8 mahl in — 32; also kann es + 4 nicht, und muß der Quotient entgegengesetzt, das ist — 8 seyn. Denn der Divisor + 4 giebt nur — 8 mahl genommen — 32 wieder, nicht aber + 8 mahl genommen. **Also, einen negativen Dividendus durch einen positiven Divisor dividirt, giebt einen negativen Quotienten.**

Der vierte Fall fordert einen negativen Divisor in einen positiven Dividendus zu dividiren. — 4 ist aber in + 32 nicht würklich, sondern das Entgegengesetzte von + 4, d. i. + 4 darin würklich darin enthalten; — 4 muß in + 32 also soviel entgegengesetzte Mahle enthalten seyn, als das Entgegengesetzte von — 4, das ist + 4 in + 32 würklich enthalten ist; folglich — 8 mahl. Und nur — 8 allein, und nicht + 8, mit — 4 multiplizirt giebt den Dividendus

+ 32 wieder; wie wir aus der Multiplikation wissen. Es folgt hieraus also: **daß ein negativer Divisor in einen positiven Dividendus dividirt, einen negativen Quotienten giebt.**

§. 38.

Fortsetzung.

Hier sind die Fälle mit ihren Quotienten zur bessern Uebersicht noch einmahl.

Es war der Divisor,	der Dividend.	so kam zum Quot.
+ 4	+ 32	+ 8
— 4	— 32	+ 8
+ 4	— 32	— 8
— 4	+ 32	— 8.

Eine aufmerksame Uebersicht zeigt uns, daß in den beiden ersten Fällen, wo Divisor und Dividendus einerlei Zeichen haben zum Quotienten + und daß in den beiden lezten Fällen, worin Divisor und Dividendus ungleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, zum Quotienten — komme. Hieraus macht man sich zur Ausübung folgende **Regel: gleiche Zeichen geben ein positives, und ungleiche geben ein negatives Produkt:** — Gehen wir nun in Gedanken zur Division der Dezimalen zurück, so werden die folgende Beispiele leicht zu entwickeln seyn.

+ 14,412 : + 1,2 ist der Quotient 12,01.
— 267,42 : — 6,2 „ „ „ 43,13. . .
0,142069 — 8 : 4 „ „ „ 0,035517 — 2
— 5,7036392 : 6 „ „ „ — 0,9506065. . .

§. 39.

§. 39.

Anmerkung wegen entgegengesetzter Brüche.

Alles was wir bis jezt von entgegengesetzten Zahlen bloß von ganzen Zahlen in Beispielen gehabt haben, gilt auch von den Brüchen. Brüche sind auch Zahlen, und unter dem Ausdruck entgegengesetzte Zahlen, versteht man alles, was zum Zahlen gehört. Der Bruch $\frac{3}{4}$ ist absolut, das ist, ohne einige Rücksicht eines Entgegengesetzten; der Bruch $+\frac{3}{4}$ ist aber nicht mehr absolut, sondern hat seinen Werth in Rücksicht auf sein Entgegengesetztes $-\frac{3}{4}$; so wie umgekehrt $-\frac{3}{4}$ seinen Werth erst in Beziehung auf sein Gegentheil $+\frac{3}{4}$ enthält. $-\frac{3}{4}$ und $+\frac{1}{2}$ ist $-\frac{1}{4}$; von $-\frac{3}{4}$ $+\frac{1}{2}$ subtrahirt giebt $-\frac{5}{4}$ oder $-1\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{4}$ mit $+\frac{1}{2}$ multiplizirt, giebt $-\frac{3}{8}$, und $-\frac{3}{4}$ mit $-\frac{1}{2}$ multiplizirt giebt $+\frac{3}{8}$; $-\frac{3}{4}$ mit $+\frac{1}{2}$ dividirt giebt $-1\frac{1}{2}$, und $-\frac{3}{4}$ mit $-\frac{1}{2}$ dividirt giebt $+1\frac{1}{2}$, alles nach den vorhin vorgetragenen Regeln.

§. 40.

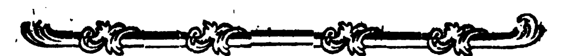
Dies war Etwas von entgegengesetzten Zahlen, aber nur soviel als nöthig war, nun mit Gründlichkeit dasjenige zu verstehen, was wir in der Folge von Logarithmen sagen werden. Sie sind es werth diese Zahlen, sich vorhin mit allen nöthigen Kenntnissen auszurüsten, und dann gleich dem geweiheten Priester, jede ihrer Hallen zu durchschauen. — Mein Wunsch, den ich hier noch hinzusetzen muß, betrift den Anfän-

 gern

gern in diesen Lehren. Er ist: daß Sie im Lesen von keiner Stelle weg zur andern gegangen seyn mögten, ohne die erste richtig verstanden zu haben, und daß Sie nun ehe Sie den Weg zum Logarithmen antreten, noch einmal den schon zurückgelegten in Aufmerksamkeit übersehen mögten.



IV.



IV. Nachrichten, Auszüge und Beurtheilungen arithmetischer Bücher.

Fortsetzung der Rezension über Florencourts Abhandlung aus der juristischen und politischen Rechenkunst.

Nun folgt das zweite Kapitel, welches

von der Wahrscheinlichkeit

handelt. — Ein schönes Kapitel! Es enthält alles was man hier, als Hülfslehre, davon fodern kann, in einer zusammenhängenden Kürze. — Vom 1 bis 7 §. ist es Vorbereitung. — Unsere Kenntniß von den Begebenheiten der Welt ist zu unvollkommen, daß wir aus dem Geschehenen, das was der Ordnung der Natur gemäß, erfolgen **müsse** mit solcher **Gewißheit** sagen könnten, als man in der Mathematik fodert: aber aus dem, was wir wissen, Schlüsse machen, das können wir, und diese Gewißheit nennt man **moralisch**, welche sich daher auf die zusammenhängende Uebereinstimmung, aller bisherigen Erfahrungen ohne die geringste widersprechende gründet. Sind unter den Erfahrungen einige für das, was wir wünschen, so wird unsre **Hofnung**, und sind einige für das, was

was wir nicht wünschen, so wird unsre **Furcht** vergrößert; und Furcht und Hofnung verhalten sich also gegen einander, wie die Zahl der vortheilhaften Fälle zu der Zahl der widrigen, wenn sie alle unsrer Einsicht nach gleich möglich sind. Eins von beiden muß erfolgen, und also besteht die Gewißheit aus der Summe der Fälle beider Gattungen, und die Hofnung verhält sich zur Gewißheit, wie die vortheilhaften zu allen möglichen Fällen, (und eben so auch die Furcht, wie die widrigen, zu der Menge aller Fälle.)

Wahrscheinlichkeit ist also ein Bruch, dessen Nenner die Menge der Fälle, der Zähler die Menge der vortheilhaften ist (wohl besser: die Menge, der für unsre Absicht passende oder vortheilhafte Fälle ist; denn sonst mögte es blos für die Hofnung eines guten Erfolgs gedeutet werden.) — Rechnungen lassen sich nur dann anstellen, wenn man die Zahl aller möglichen, und mit ihr die Zahl der für unsre Absicht vortheilhaften Fälle vergleichen kann. „Unter den sechs möglichen Lagen eines Würfels ist nur eine, die einen Aß darstellt. Die Wahrscheinlichkeit also, auf den ersten Wurf ein Aß zu werfen, kann man wohl den sechsten Theil der Gewißheit nennen, und wer läugnete, daß auf den ersten Wurf ein Aß fallen würde, hätte 5 mal mehr Wahrscheinlichkeit für sich, als der, welcher es bejahete.“

Es kommt nun darauf an, wie man alle mögliche Fälle erfahre: der Herr Verf. giebt 2 Quellen an.

Erstlich

Erstlich aus Vernunftschlüssen. So schließen wir, daß um mit 2 Würfeln 2 Aß zu werfen, jeder Würfel 1 Aß; wenn man 3 Aß werfen will, entweder der erste Würfel 1 und der zweite 2 Aß, oder umgekehrt haben müsse. Gehen wir so im Schließen fort, so finden wir die Anzahl aller möglichen Fälle = 36. Werden die günstigen Würfe bestimmt, so sind es dadurch die widrigen auch, und alles, was zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit erfordert wird.

Zweitens, aus der Erfahrung und wiederholte Versuche, wozu man aber nicht schreiten darf, so lange es unserm schwachen Verstande möglich ist, die Anzahl aller Fälle, mit ihren unendlichen Bestimmungen zu übersehen. — Hat man bei einer großen Menge von Versuchen und Erfahrungen, die günstigen von den widrigen Fällen unterschieden, so schließt man, ins künftige werden alle Fälle sich auch so zu einander verhalten; kommen fernere Versuche und Erfahrungen mit den Verhältnissen überein, oder nahe beisammen, so kann man mit Gewißheit über die Begebenheit urtheilen. Gut wäre es, wenn der Herr Verf. ein Beispiel gegeben hätte, worin man den Unterschied der ersten und andern Quelle der Wahrscheinlichkeit, und ihre Abweichungen und Annäherungen sehen könnte. Die erst §. 51. folgende Vergleichung ist schon zu bunt, und mit zu vielen Umständen verbunden.

Der 6. und 7. §. giebt nun die Grundformeln. Ist für eine gewisse Begebenheit n = der Anzahl der günsti-

günstigen, m = der Anzahl der widrigen Fälle; so ist also m + n = der Anzahl aller Fälle, und folglich

39.) $\frac{m}{m+n}$ = die Wahrscheinlichkeit, daß die Begebenheit günstig, und

40.) $\frac{n}{m+n}$ daß sie widrig ausfällt; also

41.) $\frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = \frac{n+m}{m+n} = 1$, die Gewißheit und folglich auch für die Formel 39, $1 - \frac{n}{m+n}$ und für 40) $1 - \frac{m}{m+n}$

Ist m, oder ist die Anzahl der widrigen Fälle in Vergleichung mit n, unendlich klein, so wird m = 0 und ist dann $\frac{n}{m+n} = \frac{n}{n} = 1$ die Gewißheit, daß sich die Begebenheit glücklich, und $\frac{m}{m+n} = \frac{0}{n} = 0$ die Gewißheit, daß sie sich nicht unglücklich endige. Hieraus sieht man auch, „daß je kleiner die Anzahl der widrigen Fälle, gegen die Anzahl aller Fälle wird, desto größer auch die Wahrscheinlichkeit, für eine günstige Begebenheit werden muß; und umgekehrt"

Nach dieser in Auszug gebrachte Vorbereitung folgen nun Anwendungen, auf verschiedene Spiele, auf Gebohrenwerden rc. wobei denn der H. V. Gelegenheit nimmt, die Theorie auf die verschiedenen Fälle auszudehnen. Folgendes sind nur einige der Haupt-

Hauptsätze, die in der Folge brauchbar sind: die Ausführung ist aber so zusammenhängend, daß ein Auszug Schwierigkeit macht. Es ist alles so unterhaltend, daß Rez. die Algebraisten auf das Buch selbst verweisen muß.

Wenn es ein Grundsatz ist, daß jeder nur erwarten darf, soviel zu erhalten, als er unfehlbar erhalten wird, so ist, wenn auf das Geschehen oder Nichtgeschehen einer Begebenheit ein Preis gesetzt ist, der jetzige **Werth des Preises oder der Erwartung**

42.) $\frac{n}{m+n} \times S$, das ist das Produkt der Wahrscheinlichkeit in den Preis. (§. 8.)

Ist die Anzahl der Fälle, in denen man S bekommen kann $= p$; die in denen man T bekommen kann $= q$ so ist der Werth der Erwartung, aus der Wahrscheinlichkeit allein, für einen Fall also

43.) $= \frac{pS + qT}{p + q}$

und so für mehrere Fälle und Preisen. (§. 9.)

44.) Von dem Werthe des Preises aus der Wahrscheinlichkeit, muß man den **Werth des Gewinnes**, aus der Wahrscheinlichkeit, oder den **wahrscheinlichen Gewinn** unterscheiden. Er ist die Differenz zwischen dem Werthe des Preises und dem Einsatze, und wird jenem gleich, wenn dieser $= 0$ ist. Ist die

Dif-

Differenz negativ, so ist es Verlust, und ist sie = 0, so ist keines von beides da. (§. 12.)

45.) Die Wahrscheinlichkeit, daß **mehrere Begebenheiten** geschehen, ist gleich dem Produkte aller einzelnen Wahrscheinlichkeiten; und also ist der **Werth des Preises** von dem Geschehen **derselben** gleich dem Produkte aller einzelnen Wahrscheinlichkeiten in den Preis.

46.) Wenn **der Fall** eintritt, **daß** man einen Preis bekommen soll, wenn **von mehreren** gleichmöglichen **Begebenheiten** nur eine geschieht, oder, welches einerlei ist, wenn von denselben **keine nicht geschiehet**, so giebt H. Fl. folgende sicherste Verfahrungsart: „Es sey x = der Wahrscheinlichkeit, daß die erste Begebenheit geschieht; y = der, daß die zweite geschieht ꝛc. so ist $1 - x$ = der, daß die erste nicht geschieht; $1 - y$ = der, daß die zweite nicht geschieht, also $(1 - x)(1 - y)$ (ꝛc.) = der Wahrscheinlichkeit, daß keine von allen geschieht, folglich die **entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit**, oder die, daß von allen keine nicht geschieht $= 1 - (1 - x)(1 - y)$ (ꝛc). Für zwei Begebenheiten ist sie $= y + x + xy$." (Dieser Abschnitt ist wichtig, und erfordert besondere Aufmerksamkeit. D. H. V. wäre deutlicher gewesen, wenn er den Begriff von entgegengesetzter Wahrscheinlichkeit vorher einzeln gesagt hätte.)

47.) Die Anzahl der möglichen Fälle, (oder der möglichen Verbindung,) daß unter zwei oder mehreren verschiedenen Mengen von Begebenheiten, zwei oder mehrere, von jeder Menge eine, zugleich geschehen, ist das Produkt der Mengen der Begebenheiten in einander; also Mm ist die Anzahl der möglichen Fälle, daß unter der Menge M eine mit einer aus der Menge m zugleich geschieht. Sind aber unter jeder Menge einige günstige, und die andern wiedrigen Begebenheiten; z. B. in der ersten A günstige und N widrige; in der zweiten a günstige und n widrige, so ist $M = A + N$ und $m = a + n$ also $Mm = (A + N)(a + n.)$ **Die Wahrscheinlichkeit also, daß zwei glückliche Begebenheiten zusammen geschehen, ist**

48.) $\frac{Aa}{Mm}$; daß 3 glückliche geschehen $\frac{Aa\alpha}{Mm\mu}$ und

die **entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit** davon ist

49.) $= 1 - \frac{Aa}{Mm} = \frac{aN + An + Nn}{Mn} =$ der, daß

nicht zwei glückliche Begebenheiten geschehen, folglich daß entweder eine oder gar keine geschieht.

Begebenheiten sind von einander **unabhängend**, wenn das Geschehen der einen, auf das Geschehen der andern, in keinem Betracht Einfluß hat. Im entgegengesetzten Falle sind sie von einander **abhängend**. Sind nun die Begebenheiten von einan-

ander unabhängend, und alle Mengen, und von diesen auch die günstigen einander gleich, so ist nach 47.)

50.) m^2, m^3 ectl. $m^x = (a + n)^x$

die Anzahl der möglichen Fälle. z. B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem gemeinen Spielwürfel, in drei Würfen, wenigstens einmahl 1 Aß zu werfen? Da der Würfel 6 Seiten hat, und nun von diesen nur 1 günstig seyn soll: so ist $m = 6$; $a = 1$; $n = 5$; und da jeder Wurf von dem andern unabhängig ist; so ist es einerley, ob man dreimahl hintereinander mit einem Würfel, oder einmahl mit drei gleichen Würfeln wirft; folglich ist $x = 3$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\left(\frac{a}{m}\right)^x = \left(\frac{1}{6}\right)^3$, die derselben entgegengesetzte, daß in drei Würfen gar kein Aß geworfen wird $= \left(\frac{n}{m}\right)^x = \left(\frac{5}{6}\right)^3$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit (nach 46) =

51.) $1 - \left(\frac{n}{m}\right)^x; = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} = 0{,}42176.$

(Die buchstäblichen Formeln gelten für x Würfe, die Zahlen für unser Beispiel.)

Soll unter x Würfen, mit 1 Würfel, oder x Würfel und in einem Wurfe x — 1 mahl a fallen, so ist die Wahrscheinlichkeit

Nun

52.) $1 - \frac{x \times an^{x-1} + n^x}{mx}$. (Für n^x steht im Buche durch einem Druckfehler x^n).

Nun folgt in den 30—34. die Entwicklung des Ausdrucks (50) $(a + n)^x$, insbesondere der Coefficienten, der dadurch entstehenden Reihe. Das darüber gesagte ist sehr interessant, nur keines verständlichen Auszugs fähig. §. 35. und 36. wird diese Arbeit auf die Wahrscheinlichkeit angewendet, daß unter 11429 Kindern die gebohren werden, nicht unter 5745, und nicht über 6218 Knaben seyn werden; wie solches würklich in London in den 82 Jahren von 1629 an, bis 1710 statt gehabt. Die Auflösung giebt folgenden Bruch für die Wahrscheinlichkeit, daß solches in 82 Jahre hinter einander geschehen werde $= \left(\frac{1}{3,4285..}\right)^{82} =$ 1 : 7559821522955246913580246913580246 9. Hierauf fährt der Herr Verf. fort: „Hängen die Geburthen vom Ohngefehr ab, so ist es immer gleich wahrscheinlich, ob ein Knabe, oder ein Mädchen gebohren wird, und in dieser Voraussetzung, wird auch öfters die Anzahl der Mädchen, die der Knaben übertreffen, öfters werden sie ganz zusammentreffen, öfters so weit von einander abstehen, daß entweder fast lauter Knaben, oder fast lauter Mädchen gebohren werden; und dann ist nur die Wahrscheinlichkeit vorhanden, daß das 82 Jahre hintereinander geschehen wird,

 was

was zu London geschehen ist. Wer kann aber die unendliche Kleinheit dieses Ausdruckes begreifen? Wer kann sagen, daß sie gegen irgend eine Größe, die so klein ist, als sie unser Verstand nur erdenken kann, in Betrachtung kommt? Wer wird in der Vorsetzung nicht behaupten, daß es unmöglich ist, daß die Londner Begebenheiten geschehen können? Und doch ist es geschehen. Es ist also offenbar, daß es eine göttliche Weisheit bewirken muß, daß die Ordnung, welche zu Erhaltung des menschlichen Geschlechts erfordert wird, beibehalten werde, daß ein unendliches Wesen, die unendliche Wahrscheinlichkeit des Gegentheils überwindet, wenn man nur auf Folgerungen aus allgemeinen und physischen Gesetzen merket." — Dies ist also eine von den Proben, was Mathematik mit andern physischen Kenntnißen verbunden, in der natürlichen Theologie lehrt; eine Probe von einem mathematischen Beweise der Wahrheit: es ist ein **weiser** Gott der die Welt regieret.

Hierauf folgt eine Anwendung auf das gemeine Würfelspiel, (von §. 38 — 41.) um die Wahrscheinlichkeit zu finden, mit einer gewissen Anzahl Würfel, so viel Augen zu werfen, als man will. Jede Seite eines Würfels, kann man als eine Begebenheit besonderer Art betrachten, und dann entstehet aus der Formel 50, folgende

53.)

53.) $(a + b + c + d + f + g)^x$.

H. Fl. hat diese Formel für 2 Würfel entwickelt, und für 1 bis 6 Würfel in Zahlen berechnet, woraus eine Tabelle entstehet, aus welcher man ersehen kann, wie oft es möglich ist mit 1 bis 6 Würfeln eine Anzahl Augen zu werfen. Von der Verfertigung dieser Tabelle wird auch die Methode von Jac. Bernoulli angegeben, welche sehr leicht ist. „Man schreibt nämlich zuerst die Würfe mit einem Würfel einzeln hin; und dieses sechs mahl untereinander, so daß man bey jeder Reihe, eine Stelle weiter, nach der rechten Hand zu rücket, nimt die Summe von jeder senkrechten Reihe, so giebt dieses die Reihe der Würfe für zwei Würfel, wie folget:

1, 1, 1, 1, 1, 1, Würfe von einem Würfel
  1, 1, 1, 1, 1, 1,
    1, 1, 1, 1, 1, 1,
      1, 1, 1, 1, 1, 1,
        1, 1, 1, 1, 1, 1,
          1, 1, 1, 1, 1, 1,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, Würfe
von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 Augen.

Verfährt man mit dieser Reihe für die 2 Würfeln eben so, so erhält man die Reihe Würfe, für 3 Würfel rc. Es wird hieraus ein Wink für Policey-

richter gefolgert, wie sie die Wahrscheinlichkeit bei Spielen, bei Ertheilung der Erlaubniß zum Spielen der herumziehenden Spieler, nutzen können.

Der 43 und 44ste §. enthält die Findung der Mise (Einsatz) und des Preises des Gewinnes bei Spielen, so, daß der Spieler und der Banquier beide einander nicht übervortheilen. In jedem Spiele wettet der Spieler, daß eine Begebenheit geschehe, und der Banquier das Gegentheil, und dessen Behauptung eintrift, der bekommt von dem Andern eine gewisse Summe. Soll nun keiner dem andern bevortheilen, so verhält sich die Mise zum Preise, wie die Summe der günstigen Fälle für den Spieler, zur Summe der denselben widrigen oder zur Summe der günstigen für den Banquier. Spieler und Banquier, sollen nämlich nicht mehr auszahlen, als sie Hofnung haben, wieder einzunehmen. Giebt der Spieler 1 zur Mise, und bekommt, wenn er gewinnt x als den Preiß der Mise; so ist, weil seine Wahrscheinlichkeit zu gewinnen $= \frac{n}{m+n}$ und zu verliehren $= \frac{m}{m+n}$; die Hofnung des Banquiers $= \frac{m}{m+n} \times 1$ und des Spielers $= \frac{n}{m+n} \times x$ zu bekommen. Nach der obigen Bedingung muß nun $\frac{m}{m+n} \times 1 = \frac{n}{m+n} \times x$ seyn, folglich

54.)

54.) $x = \frac{m}{n}$ und

55.) $1 = \frac{xn}{m}$ die Mise.

In Zahlen-Lotto sind $m + n = 90$ Nummern, nämlich $m = 85$ und $n = 5$, für die Mise 1 ist also $x = \frac{85}{5} = 17$, also 17 mal muß in simplen Auszuge die Mise wieder gezahlt werden, wenn keiner geschadet werden soll; die Direction giebt sie aber nur 15 mal wieder. Der Herr Verf. hat x auch für die Amben, Ternen und Quaternen berechnet, und findet, daß
die Ambe 399½ mahl die Mise
die Terne 11747 mahl die Mise
die Quaterne 511037 mahl die Mise
der bestimmte Auszug 89 mahl die Mise wiedergegeben müsse: die Banquiers bezahlen aber nur den Auszug mit 15, die Ambe mit 270, die Terne mit 5300, die Quaterne mit 60000, den bestimmten Ausgang mit 75 mahl der Mise; woraus man die Größe des Gewinns erkennen kann, den die Lottobank hat.

Bis hieher ist bei den Rechnungen angenommen, daß ein Fall eben so möglich wie der andere: ist dies nicht, so muß sich auch die nach dem gewöhnlichen Gesetzen gefundene Wahrscheinlichkeit sehr darnach verändern. Es sey $\frac{1+\alpha}{n}$ = der Wahrscheinlichkeit, daß eine Begebenheit bei einem Versuche geschehe; $\frac{1+\beta}{n}$

 = eben

= eben der Wahrscheinlichkeit für eine zweite Begebenheit; $\frac{1+\gamma}{n}$ für eine dritte ꝛc. und $\frac{1+\nu}{n}$ = eben der Wahrscheinlichkeit für die n^{te} Begebenheit, so daß nur n Begebenheiten überhaupt, entweder günstige und widrige zusammen, oder günstige oder widrige allein statt finden können, so ist

56.) $\frac{1+\alpha}{n} + \ldots\ldots + \frac{1+\nu}{n} = 1$ die Gewißheit, und (nach 41.)

57.) $n = 1 \times n + \alpha + \beta + \ldots + \nu$

58.) die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von $\frac{1+\alpha}{n}$ ist $= 1 + \frac{1+\alpha}{n} = \frac{n-\alpha-1}{n}$ folglich die, daß in x Versuchen eine Begebenheiten nicht geschehe,

59.) $= \frac{(n-\alpha-1)^x}{n^x}$, folglich die entgegengesetzte, nämlich daß sie geschehe

60.) $= 1 - \frac{(n-\alpha-1)^x}{n^x}$

61.) Da nun diese Begebenheiten von einander unabhängend sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Begebenheit, in x Versuchen einmal geschieht,

$$= 1 - \frac{(n-\alpha-1)^x}{n^x} + 1 - \frac{(n-\beta-1)^x}{n^x} + \ldots\ldots + 1 - \frac{(n-\nu-1)^x}{n^x}$$

(In der Abhandlung fehlet in dieser Formel am Zähler des 2ten und 3ten Gliedes der Exponent x durch einem Druckfehler.) Es werden diese Formeln auf Erfahrungen von einem Würfel angewendet, und daraus die Wahrscheinlichkeit berechnet, woraus sich aber nicht gut ein Auszug machen lässet.

Im 53sten §. wird gesagt, „daß die in der Abhandlung gezeigten Sätze so aufgelöset wären, daß ein Richter darnach sprechen müßte, weil das Mein und Dein justitia commutativa nicht distributiva gilt.“ Es werden nicht alle Juristen es mit dem H. V. halten, und nicht alle Richter hiernach entscheiden, wenn sie auch könnten: beide nehmen es größtentheils als eine bekannte Sache an, daß bei allen rechtlichen Handlungen auf die Beschaffenheit der Person gesehen werden müsse, um zu beurtheilen, in wie fern solche verbunden werden könne. — Bei der Ertheilung eines guten Raths aber müssen die Glücksumstände der Person mit zu Rathe gezogen werden; denn z. B. der Gewinn von 1 Rthlr. ist dem gewiß noch einmahl so viel werth der 5000 hat, als dem, der 10000 Rthlr. hat. H. Fl. hat hierüber viel schönes aus einer Abhandlung des Dan. Bernoulli extrahiret, welches aber nicht wieder in Auszug gebracht werden kann, aber der Beherzigung werth ist.

Im 63sten als dem letzten §. dieser Abhandlung, werden nun noch die besten Schriften über die Wahrscheinlichkeit angeführet, und im Kurzen noch etwas von ihrer Anwendung in anderen Wissenschaften gesaget.

(Die Fortsetzung im folgenden Stücke.)



Auseinandersetzung eines der schwersten Fälle aus der Interusurienrechnung von M. J. N. Müller. Göttingen 1785, 3 Quartb.

Der Fall ist folgender: Daß der Schuldner eine Summe in gewissen Terminen zu gleichen Theilen zu bezahlen schuldig ist; zugleich aber jeden Theil der Summe bis zum Zahlungstermine zu einem bestimmten Procent verzinsen muß, und derselbe kann dagegen auch jeden Theil bis zur Zahlungszeit nach einem andern Zinsenfuß nutzen. Beide wollen sich jezt aus einander setzen: und ist die Frage, wie viel der Schuldner dem Gläubiger zu geben habe.

Zuerst hat H. M. eine Allgemeine Aufgabe gegeben, worin Er alle Umstände in die algebraische Sprache setzt. Es sind n Termine, in welchen zu gleichen Theilen, jeder $= s$, die Summe ns ausgezahlt wird. Der 1te Termin ist nach $q + t$ Jahren, der

der 2te nach $q + 2t$ . . . der n^{te} nach $q + nt$ Jahren. Der Schulder muß die Theile zu dem Zinsfuß $p : 1 = \frac{1}{p}$ verzinsen, kann sie aber auch nach dem Fuße $m : 1 = \frac{1}{m}$ nutzen. Diese allgemeine Aufgabe wird, durch eine darauf folgende **besondere Aufgabe** auf einen bestimmten Fall angewandt; worin $nf = 1000$; $n = 10$; $f = 100$; $q = 9$; $t = 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{50}$ und $\frac{1}{m} = \frac{1}{20}$ ist.

In der **Vorbereitung zur Auflösung** wird theils die Methode wornach man die Aufgabe berechnen kann, auch der Grund der Leibnitzischen angegeben; die Auflösung der Aufgabe geschiehet aber ganz nach der sogenannten **Hofmannischen Methode**, also nach einfachen Zinsen; Theils werden einige Bedeutungen der Buchstaben erläutert, und dann wird mit der würklichen Ausarbeitung der Entwicklung so weit fortgefahren, bis der Leser den Werth eines jeden Termins für den Gläubiger am Ende des lezten Zahlungtermins bestimmen kann. Hierauf macht eine Tabelle, welche den Gang der Auflösung bis dahin deutlich vorstellet, den Anfang der eigentlichen **Auflösung**, welche diese Tabelle ganz entwickelt und am Ende folgende **Formel für die Summe** giebt, **welche der Schuldner** dem Gläubiger jezt **zahlen muß**

$$\frac{m}{m + q + nt}$$

$$\frac{m}{m+q+nt} \times \left(1 + \frac{(n-1)t}{2m} + \frac{q}{p}\left(1 + \frac{nt}{m}\right) + \frac{(n+1)t}{2\,mp}\left(m+nt-q-\frac{(2n+1)t}{3}\right)\right) \times n\,f$$

nach Hofmannischer Methode; dies giebt, nach obigen bestimmten Angaben $793\frac{1}{3}$ Rthlr. Ist $q = 0$; $p = \infty$; $t = 1$. so fallen in jener Formel alle Glieder weg, worin p vorkommt, weil eine endliche Größe, durch eine unendliche dividiret $= 0$ wird, und es entstehet dann

$$\frac{(2m+n-1) \times n\,f}{2(m+n)}$$ für den Fall,

daß der Schuldner die Summe f in n einjährige Termine abbezahlt, und das Kapital unentgeldlich nutzt.

H. M. setzt $p = \infty$ (unendlich) welches auch mathematisch richtiger ist, als (wie Florencourt ꝛc.) $p = 0$; denn p ist die Zahl, wie oft die Zinsen im Kapitale enthalten sind; sind nun jene $= 0$, das ist, werden keine bezahlt, und C ist das Kapital, so muß $\frac{C}{0} = p$ seyn; eine endliche Größe aber durch 0 (Nichts) dividiret, giebt einen unendlichen Quotienten, also $p = \infty$.

Uebrigens ist diese Abhandlung besonders deutlich vorgetragen, und Anfängern in Entwicklung dergleichen analytischer Auflösungen sehr zu empfehlen. Es sind keine Sprünge gethan, sondern ist gleichsam Schritt vor Schritt in der Entwick-

lung

lung fortgegangen. Man kann diese Abhandlung als eine Erläuterung des 52sten §. in Florencourts Abhandlungen 1stes Kapitel ansehen, worin eben derselbe Gegenstand sehr kurz abgehandelt wird.



Arithmetischer Unterricht für die Jugend, Zürich, bey Joh. Caspar Füeßli, 1783, in Octav 152 Seiten mit einer Kupfertafel. (Preiß 8 ggr.)

Eine Anzeige ist dieses kleine Buch gewiß werth. Der Verf. bestimmte es für Kinder zum Lesebuche, für Aeltern zu allenfallsigen Leitfaden beim Unterricht ihrer Kinder, auch in dieser Absicht für Lehrer, und für junge Leute zu einer nicht ungründlichen Anleitung zum Selbstunterrichte — und er hat seinen Zweck ziemlich gut erreicht. Es ist in Unterredungen zwischen dem Lehrer und Carl und Lottchen abgefasset, welche ziemlichen Reiz für Kinder haben, das Trockene der Wissenschaft mit dem Angenehmen verweben, und für Kinder, welche Rechnen lernen, eine angenehme Wiederholung seyn würden. In der ersten Unterredung wird das **Aussprechen und Schreiben der Zahlen** auf eine begreifliche und gründliche Art vorgetragen. Der Lehrer erzählt unter andern ganz kurz das

Zäh-

Zählen des blinden Saundersons, um seinen kleinen Zuhörern begreiflich zu machen, daß unsere Zählungsart ganz willkürlich ist, und es mancherlei Arten gebe, die Vielheiten auszudrücken. Ziefern und Zahlen scheinet er aber zu verwechseln. Die 5 folgenden Unterredungen enthalten **die vier Rechnungsarten** in unbenahmten oder Zahlen von einem Namen. Die Beispiele sind leicht und aus dem Leben oder der Geschichte gewählt, und geben zu mancher guten Anmerkung Anlaß. — In der Multiplikation wird den Schülern eine Anweisung gegeben, wie sie sich das Auswendiglernen des Einmahleins angenehmer machen können. Ich habe es sonst noch nirgend gefunden, und schreibe es daher hier ab.

„**Lehrer.** Weil ihr doch so geneigt seyd, will „ich euch etwas zeigen, das euch das Lernen ange„nehm macht.

„**Beyde.** Das wäre doch vortreflich!

„**Lehrer.** Horcht nur aufmerksam. — Bis „auf die Zahl 6 mahl 6 habt ihr das Täfelchen nö„thig, — und dies läßt sich mit wenig Müh' erler„nen — was über diese Zahl gehet, läßt sich vermit„telst der Finger ausrichten. — Reich mir einmahl „die Hände dar, Lottchen. — Ich nehme an, du wis„sest dies Täfelchen bis auf 6 mahl 6 auswendig: und

„weil

„weil dieß grade die ersten Zahlen sind, deren Factum „man an den Fingern finden kann, so wollen wir den „Versuch mit denselben machen. — Dieses zu finden, „strecke an jeder Hand den Daumen empor, die übri- „gen Finger schließe in die Hände ein. — Nun be- „zeichnen die stehenden Finger eben so viel Zehner — „also hier zween; die gekrümmten bezeichnen Einer, „folglich an jeder Hand vier. Die zween Zehner zu- „sammen addiret machen 20. Die Summen der Ei- „ner von jeder Hand multipliciret und das Factum zu „den 20 addirt, geben das verlangte Produkt von 6 „mahl 6, nemlich 20 und 4 mahl 4 (das also unter „6 ist) ist 36. — Denn sehet auf dem Täfelchen, „was macht 4 mahl 4?

„Lottchen (schaut auf dem Täfelchen und fin- „det 16.)

„Lehrer. Aber damit ihr mehrere Exempel auf „die Art auflösen könnt, muß ich euch noch sagen, daß „ihr in Absicht des Aufhebens der Finger auf die Fak- „tors, daß ist, auf die Zahlen die gegeben sind, Acht „zu geben habet. Wenn, zum Beispiel, 7 und 9 ge- „geben sind, so werden an der einen Hand wodurch „die Sieben angezeigt werden, zween, bey 9 hingegen „vier Finger an der andern Hand aufgehoben, folg- „lich allemahl bey 6 einer, bey 7 zween, bey 8 drey, „bey 9 vier, bey 10 fünf. — Wie würdest du es also

„an-

„anstellen, Carl, wenn du das Factum von 7 mahl
„9 suchen solltest?

„Carl. Ich strecke an der einen Hand zween,
„an der andern vier Finger — das giebt 60, dann
„sind an der einen Hand noch ein einziger, an der an-
„dern aber sind drey gebogen: — folglich 1 mahl 3
„giebt drey, zu sechszig — giebt 63. (Lottchen sucht's
„auf dem Täfelchen, und findet es eben so").

Dieß kann auch eine Probe des Vortrags seyn, welcher freilich an manchen Orten viel besser ausfällt: nur der zürcher Dialect ist für einen reinen Deutschen oft unangenehm.

Mit der 7ten Unterredung fangen die **Rechnungsarten in mehr benahnten Zahlen,** mit der Addition an. In dieser wird denn auch von Zürcher-Münzen, Gewichte und Maaßen etwas gesaget, woraus ich für meine Leser folgende Nachrichten ausschreibe.

„Der Zürcher Thaler ist als Real-Münze 2 fl.
„und als Ideal-Münz 1 fl. 32 ßl. Zürcher Valute.

„Die vornehmsten ausländischen Münz-Sorten
„und deren Werth nach der Zürcher-Valute sind

	fl.	ßl.	hl.
1. In Portugal und Spanien:			
ein Piaster = = =	1	20	—
= Real in Portugal =	—	2	10
= Real in Spanien = =	—	6	—
2. In Frankreich.			
ein Livre = = =	—	12	8
= Ecu = = =	1	38	—
= Louisneuf = =	9	24	—
3. In England.			
ein Pfund Sterling = =	7	8	—
= Schilling = =	—	14	—
eine Guinee = =	7	14	—
4. In Holland.			
ein Thaler = = =	1	20	—
= Gulden = = =	—	24	—
= Schilling = =	—	7	4
= Stüver = = =	—	1	2
5. In Dännemark.			
eine Krone = = =	—	37	4
= Mark = =	—	9	4
6. In Schweden.			
ein Thaler = =	—	32	—
eine Caroline = =	—	16	—
= Mark = =	—	8	—

	fl.	ßl.	hl.
7. In Polen und Preußen.			
ein Gulden	—	16	—
in Großpolen 1 Gulden	—	8	—
1 Deutchen	—	1	5
1 Groschen	—	—	6
8. In Rußland.			
ein Rubel	1	24	—
eine Grive	—	6	4
eine Kopeke	—	—	8
9. In Ungarn.			
ein Gulden	—	28	—
10. In der Türkey.			
ein Beutel	600	—	—
„ Ducaten	3	—	—
„ Aslan	1	8	—
„ Asper	—	—	6
11. In Italien.			
ein Scudo	1	20	—
eine Zechine	3	—	—
ein Lire	—	32	—
„ Grosse	—	2	4
„ Soldo	—	—	4

„Das

„Das Original- oder Muttermaß zu den glatten Früchten ist das viertel: es wird bestrichen und hält 1323 Zürcher, und 1042½ französische Kubikzoll. Zu den rauhen Früchten ist es ebenfalls das Viertel, welches 1338 dasige und 1053 französische Kubikzoll hält; und also 2$\frac{2}{17}$ pro Cent großer als das zu den glatten Früchten ist. — Von den Hohlmaße für flüßige Sachen ist noch anzumerken: daß ein Gefäß, dessen innerer Raum einen kubischen Zürcher Schuh ausmacht 14⅗ Maß hält: und ein Maß enthält 116¼ dasige, oder nicht gar völlig 92 fr. Zoll. In der Subtraktion ist zwar ein Beispiel von der Zeit gegeben, aber gar nichts deutliches darüber gesagt worden: etwas so vielen Rechenbüchern fehlet. Uebrigens sind in diesen vier Rechnungsarten die Zeichen derselben gehörig zu brauchen gelehrt, welches dem Verfasser in der Folge seiner Unterredungen vielen Nutzen schaffet.

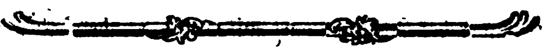
In der 12ten bis zur 16ten Unterredung wird **von den Brüchen** auf eine sehr leichte Weise gehandelt. Hier darf man wohl nicht alle Gründlichkeit verlangen, da die Beweise zu abstract zu werden anfangen. Die Ordnung ist sehr schön, und auf 14 Blättern in den sokratischen Vortrage beinahe alles das, was man von einer Anweisung der Brüche in Zahlen fordern kann, vorgetragen.

Die 4 folgenden Unterredungen enthalten unter den Namen der Regeldetri nicht allein die Begriffe des Verhältnisses und Proportion, sondern auch sehr deutlich ihre Anwendung; und Resens Regel ist dem H. Verfasser auch eine allgemeine Regel, womit er die verschiedenen besondern Regeln, conversa, quinque ꝛc. vermeidet, und die Köpfe seines Carls und Lottchens damit nicht unnöthiger Weise überhäufen will. Die Anwendung der Reesischen Regel ist gut ausgeführet; nur die Regel selbst ist zu Reesisch gegeben, und hätte mehrerer Deutlichkeit bedurft.

Die zwanzigste Unterredung handelt noch kurz von der Stichsrechnung, welche der Verfasser auch Gleichungs-Regel nennet, von der Gesellschafsregel und von den Erbschaftstheilungen, freilich, ganz ohne den unnöthigen Kram der vielerlei Fälle, welche man in vielen andern Anweisungen findet, und doch im Leben nie vorkommen können.

Den Schluß machen einige Exempel. Das Büchelchen hat immer sehr viel empfelendes, um es Kindern zum Nachlesen in die Hände zu geben.

V.



V. Anfragen.

Unter der Menge von Proben, verdienet unstreitig, die mit der Probezahl 11, welche uns Klausberg S. 676. u. s. w. seiner Demonst. Rechenkunst umständlich gelehret hat, den Vorzug: und dennoch findet man sie in den neuern Anweisungen zur Rechenkunst so selten. Die Neunerprobe ist ungleich ungewisser, und wird immer, größtentheils in allen Rechenbüchern von neuen vorgetragen. Hier möchte ich fragen: was für Gründe die Schriftsteller der neuen Werke gegen die Probe mit 11 haben? Vielleicht ist einer dieser Herren so gütig, mich darüber zubelehren; vielleicht kanns mir auch jemand sagen, wer der erste war, der sie lehrte? Ich weiß davon keinen ältern Schriftsteller als Clausberg — sollte sie der erfunden haben?

P.

In den, im Jahre 1782. in Hannover herausgekommenen Allgemeinen wöchentlichen Briefwechsel der Gelehrten und Künstler Deutschlands 1tes Vierteljahr, that ich (S. 158.) die Anfrage, die ich hier nur noch einmahl im Auszuge wiederholen will, weil sie dort nicht beantworten worden, die Sache es aber werth ist, von ihrer Geschichte Gewißheit zu haben.

Leibnitz wird, in allen Schriften, welche ich von seinen gelehrten Arbeiten gelesen, allgemein für den Er-

Erfinder der Rechnungsart mit o und 1, oder der Dyadik angegeben. Nur in einem Manuscripte, welches Observationes über Wolfs Mathesin enthält, welche im Jahre 1748. von dem Prof. Mair in Halle sollen vorgelesen werden seyn, finde ich folgendes behauptet: „Einige halten den Fürsten Lobkowitz für den Erfinder „dieser Rechenkunst, und sagen: Leibnitz habe ein „Buch aus seiner (des Lobkowitz) Auktion gekauft, „nemlich die Mathesin bicipitem, woraus er sie gelernet.“

An einem andern Orte stehet: „Wir haben eine „Arithmeticam binariam oder dyadicam, wovon „sich Leibnitz in Miscell. Berolinens. 1702. vor den „Erfinder ausgiebt; wie andere behaupten, der Fürst „Lobkowitz in Polen sey der erste gewesen;“ — Herr Mair scheinet der Behauptung, daß Lobkowitz der Erfinder sey, Beyfall gegeben zu haben. Auch lebte ein Lobkowitz, (der aber wie mir bekannt ist, nicht aus Polen, sondern aus Madrit war und daselbst 1606 gebohren wurde) welcher Mathesin liebte und trieb, auch darin geschrieben hat, früher als Leibnitz, und dadurch erhält die Sache Wahrscheinlichkeit. Ist nun jene Behauptung wahr? oder woraus hat sie nur ihre Scheingründe nehmen können? — das sind die Fragen, um deren Beantwortung ich diejenigen bitte, welche dazu im Stande sind.

P.

Aufgabe.

Man wünschet folgende Aufgabe so aufgelöset zu haben, daß die Auflösung dem bloßen Zahlenrechner verständlich ist.

Ein Güterbesitzer stirbt, und hinterläßt seinem 7 jährigen Sohne Güter, welche würklich 80000 Rthlr. werth sind, aber auch zusammen 90000 Rthlr. Schulden, welche auf diese Güter haften. Weil er seit langer Zeit keine Zinsen bezahlt hatte, so werden seine Güter nach seinen Tode angeschlagen. Baar will niemand mehr dafür als 65900 Rthlr. bieten; aber es findet sich jemand, der für die Hälfte der Güter 52000 Rthlr. anbietet, die er in 24 jährigen Zeitrenten abführen will. Dieserwegen trift man zum Vortheil des Erben und der Gläubiger folgenden Vertrag: Man will die Schulden in den 24 Jahren von der Zeitrente nach und nach abbezahlen, und die andere Hälfte der Güter auf Zeit verpachten, und von der Pacht den Gläubigern, welche die ersten 65000 Rthlr. zufordern hätten, jährlich und bis zu Abbezahlung ihrer Forderung 2 Procent geben. Das Pachtgeld beträgt jährlich 1500 Rthlr. Nach und nach werden dadurch mehrere Kapitalien frei, und von dem Zeitpachtgelde bleibt also immer mehr übrig. Es frägt sich demnach: nach wie viel Jahren der Sohn die Hälfte seiner väterlichen Güter völlig frei hat?